Structures hiérarchiques en géographie

Des modèles linéaires aux modèles non linéaires (modèles puissances et corrections log-périodiques)

M. Forriez M. et Ph. Martin

UMR ESPACE 6012 CNRS Université d'Avignon

Janvier 2007

Les lois puissances
Approche empirique

- La loi rang-taille
- Les lois fractales (B. Mandelbrot)
- Les lois d'échelle (L .Nottale)

$$V_i = V_0\left(\frac{1}{r_i}\right)^{\delta}$$

Les lois d'échelle
Approche théorique

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\ln\varepsilon} = a + bL \quad (1)$$

$$L = L_0\left[1+\left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right)^{\delta}\right] \quad (2)$$

ou $$L = L_0\left[\left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right)^{\delta}\right] \quad (3)$$

Loi rang-taille

$$V_i = V_0\left(\frac{1}{r_i}\right)^{\delta}$$

$$\lambda = 1$$

$$\varepsilon = r_i$$

$$\delta = D - D_T \quad ?$$

La correction log-périodique continue

Changement de variable

$$\varepsilon = \left| \frac{1}{r_i} - r_C \right|$$

$$\frac{\mathrm{d}\phi(\varepsilon)}{\mathrm{d}\ln\varepsilon} - D\phi(\varepsilon) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\mathrm{d}\phi(\varepsilon)}{\mathrm{d}\ln\varepsilon} - D\phi(\varepsilon) = \chi(\varepsilon) \quad (2)$$

$$\frac{\mathrm{d}\chi(\varepsilon)}{\mathrm{d}\ln\varepsilon} - D'\chi(\varepsilon) = 0 \quad (3)$$

où $D' = D + \mathrm{i}\omega$

La correction log-périodique continue

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi(\varepsilon)}{\mathrm{d}(\ln\varepsilon)^2}+B\frac{\mathrm{d}\phi(\varepsilon)}{\mathrm{d}\ln\varepsilon}+C\phi(\varepsilon)=0 \text{ où } B=2D+\delta \text{ et } C=D(D+\delta) \quad (1)$$

$$\phi(\varepsilon)=a\varepsilon^{D}\left(1+b\varepsilon^{\delta}\right) \quad (2)$$ où $\delta = \mathrm{i}\omega$

$$\phi(\varepsilon)=a\varepsilon^{D}(1+b\cos(\omega\ln\varepsilon))+i\left(ab\varepsilon^{D}\sin(\omega\ln\varepsilon)\right) \quad (3)$$

$$\phi(\varepsilon)=a\varepsilon^{D}(1+b\cos(\omega\ln\varepsilon)) \quad (4)$$ (correction log-périodique)

$\left(ab\varepsilon^{D}\sin(\omega\ln\varepsilon)\right)$ (5) est négligeable.

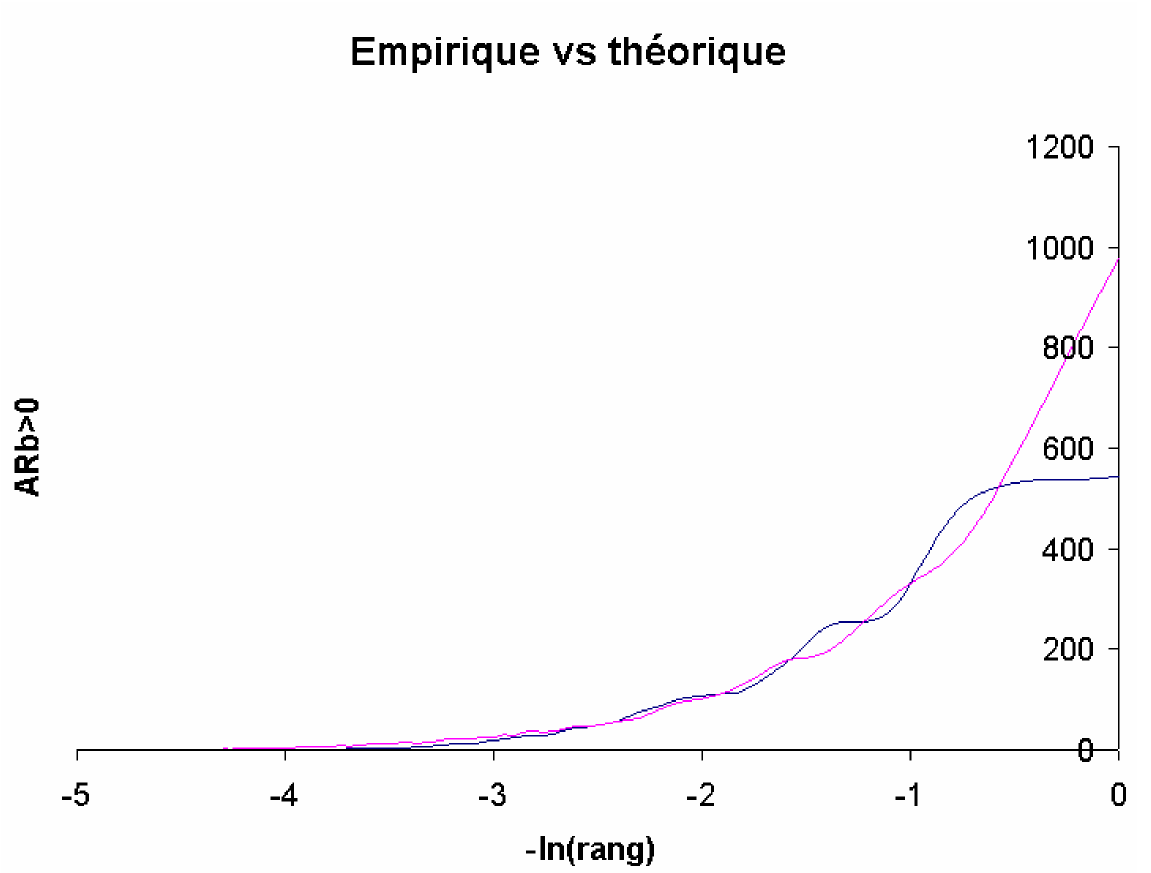
L'accroissement relatif

- L'accroissement relatif AR d'une variable *V* est calculé entre les dates t_n et t_{n-1}.

$$\mathrm{AR} = \left| \frac{\left(V_t - V_{t-1}\right)}{V_{t-1}} \right|$$

- On applique cette équation aux chroniques de débits (ARQ) d'une source (le Cauron).

L'exemple de l'accroissement des débits de la source du Cauron



a	1100
b	0,1
D	1,15
ω	2108
Rc	0,0104167

Problème avec la correction log-périodique continue

- Comment évaluer une dimension fractale complexe en pratique ?
- Solution provisoire : la discrétisation des valeurs observées.
- Exemples du château de Boves et du résultat des explorations spéléologiques dans le monde.

La correction log-périodique discrète

- Une variable d'état (temps, impulsion, *etc*.)
- Évaluer un rapport d'échelle g
- Évaluer une valeur critique V_c

$g = (V_{n+2} - V_{n+1})/(V_{n+1} - V_n)$ (1)

$V_c = (gV_{n+1} - V_n)/(g - 1)$ (2)

Relation de récurrence (loi de D. Sornette) :

$$V_{n+1} = V_c + (V_n - V_c)/g \quad (3)$$

L'exemple de Boves et du résultat de l'exploration des cavités > 1000 m

n	Boves date réelle	Date prévue
1	920	920
2	960	959
3	1025	1028
4	1140	1150
5	1360	1366
Bifurcation		
6	1604	1600
7	1945	1944

n	Date effective d'exploration des cavités	Date prévue d'exploration des cavités
1	1956	1956
2	1966	1971
3	1978	1980
4	1981	1985
5	1988	1987
6	1993	1989
Bifurcation		
7	1997	1997
8	1998	2001
9	1999	2003
10	2001	2004
11	2003	2005
12	2006	2006

Accélération et décélération

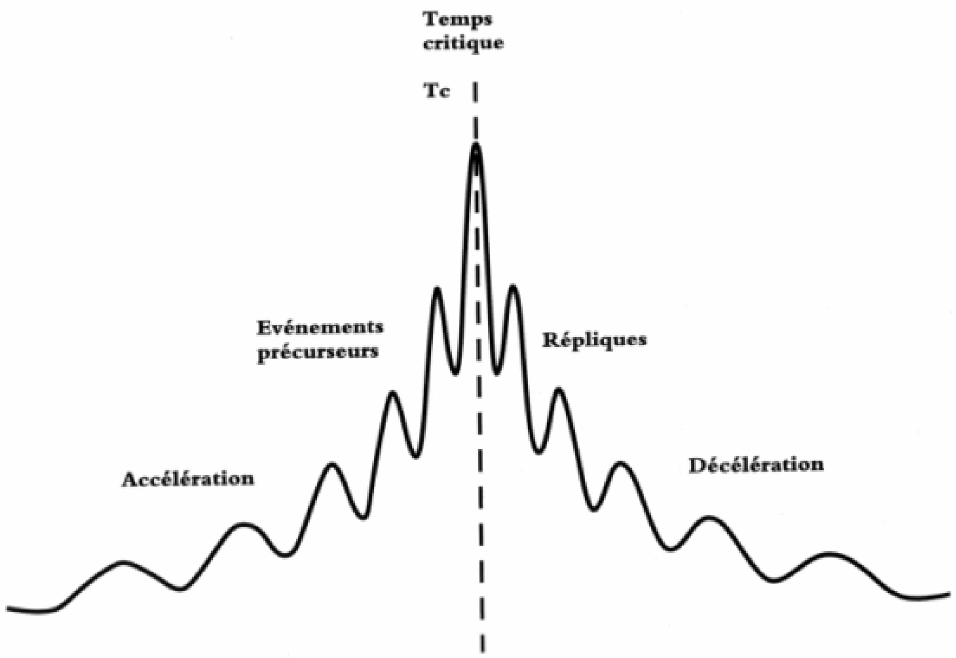


Figure 1 : exemple schématique des deux apparences d'une loi log-périodique (in Chaline J. et Marchand D., 2002 d'après D. Sornette, 1998, complété).

Paramètres des modèles

Boves	Cavités
g = 0,56	g = 1,77
Tc = 870	Tc = 1991
Bifurcation	
g = 0,68	g = 1,83
Tc = 870	Tc = 2006
Décélérations	**Accélérations**

Problème de l'échantillonnage

- Les échantillonnages parfaits (rang-population urbaine)
- Les échantillonnages imparfaits mais significatifs (rang-ARQ ; rang-temps)