Structures multi-échelles en géographie

Approche de la relativité d’échelle

Maxime Forriez [2]
Laurent Nottale [1]
Philippe Martin [2]

[1] Observatoire de Paris – Meudon LUTH - CNRS
[2] Université d’Avignon ESPACE - CNRS

1 - Problèmes d’échelles

2 - La théorie de la relativité d’échelle

3 - Application récente de la RE en géographie

(indépendance et dépendance d’échelle)

Échelle et faux synonymes

– **Niveau(x)** → Approche essentiellement qualitative (cohérence, nécessité de découper, potentiel d'agrégation spatio-temporelle)

– **Résolution(s)** → Approche quantitative liée, en géographie à la cartographie, mais plus largement à la mesure

Échelles, premières définitions

- Échelle de **référence**
  - Unité de mesure (mètre étalon, la seconde, etc.)
- Échelle de **résolution**
  - Précision de l'appareil de mesure et/ou résolution de travail
- Échelle **cartographique** (facteur de réduction : 1/x ; 1/25000^{è})
  - Fenêtre, étendue, zone d'étude
- **Continuum** scalaire (gamme d'échelles)
  - Espace des échelles (relations formelles)
- **Lois** d'échelle
  - Lois qui régissent la transformation (variation d'une quantité) entre échelles
- **Fractal**, fractalité
  - Entité ou système explicitement structuré en échelles y compris même l'espace (espace fractal)

Les échelles dans la nature : structuration universelle

1	10^{-33} cm	Echelle de Planck
	10^{-28} cm	grande unification
10^{10}		
		limite actuelle accélérateurs
	10^{-16} cm	unification électro-faible
10^{20}	$3\ 10^{-13}$ cm	quarks
	$4\ 10^{-11}$ cm	longueur Compton électron
	1 Angstrom	rayon de Bohr atomes
10^{30}	40 microns	virus bactéries
	1 m	échelle humaine
10^{40}		
	6000 km	rayon Terre
	700000 km	rayon Soleil
	1 millard km	Système Solaire
10^{50}		
	1 parsec	distance aux étoiles
	10 kpc	rayon de notre Galaxie
	1 Mpc	amas de galaxies
	100 Mpc	très grandes structures
10^{60}	10^{28} cm	Echelle Cosmologique

Physique des particules, nucléaire, atomique

Géographie

Cosmologie

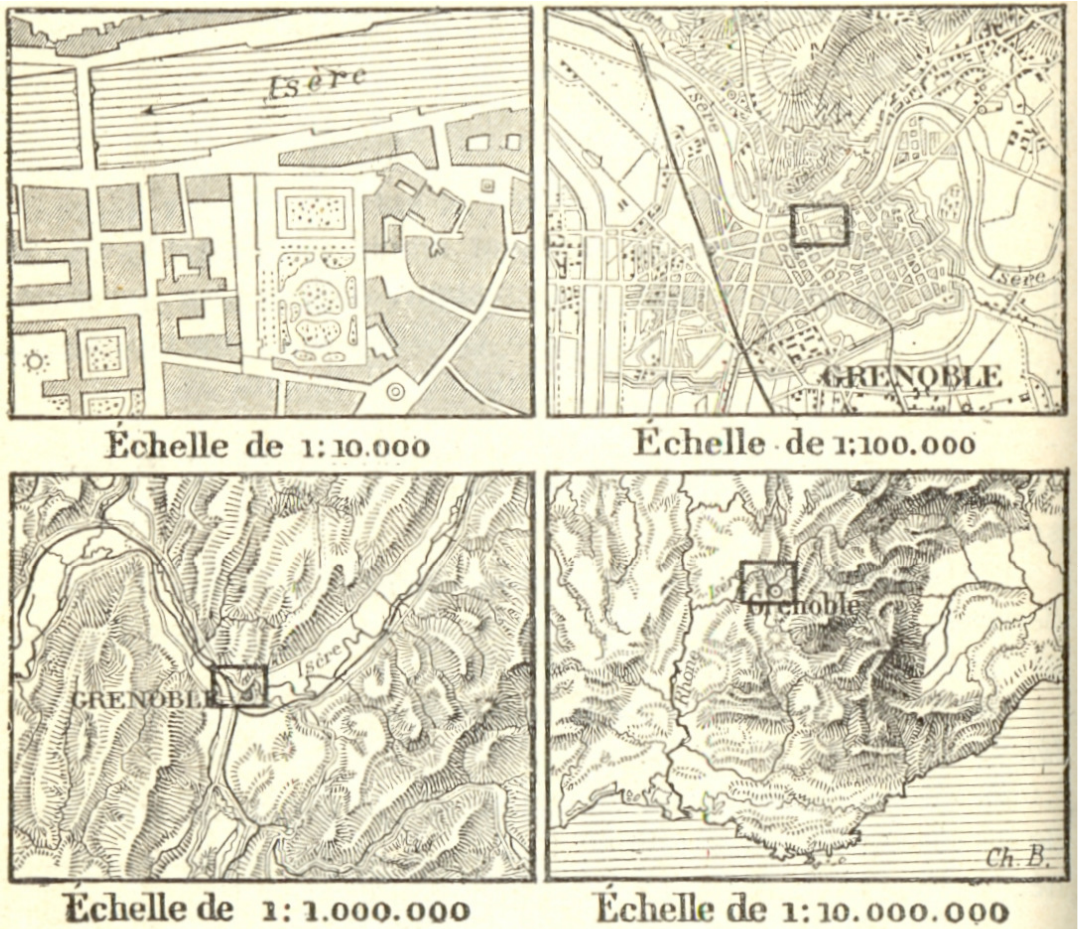
Biologie

Astronomie

Échelle et géographie classique

Constat :

L'information géographique contenue dans une carte et la **fenêtre** sur laquelle cette information porte, changent en fonction de la **résolution** de la carte.



CARTE D'UNE MÊME CONTRÉE A DES ÉCHELLES DIFFÉRENTES.

Dans la carte à grande échelle (1 : 10 000), Grenoble occupe tout le champ de carte; dans la carte à petite échelle (1 : 10 000 000), ce n'est plus qu'un point. Au milieu de chacune des trois dernières cartes on a encadré l'espace occupé par le champ de la carte immédiatement précédente.

Extrait d'un manuel scolaire de classe de seconde datant de 1926

Échelle et problématique géographique

- Un double changement (de résolution et de taille de fenêtre) conduit à un changement de problème lorsque l'on change de carte (ou d'image, etc.) et inversement.
- Mais la **compréhension** d'un problème défini à une échelle x nécessite de se reporter aux cartes à plus grande et plus petite échelle. Donc à **articuler des niveaux discrets**.
- L'échelle est donc une **question ancienne** en géographie où elle a été instrumentalisée sous une forme **liée à la perception et à la représentation des territoires**.

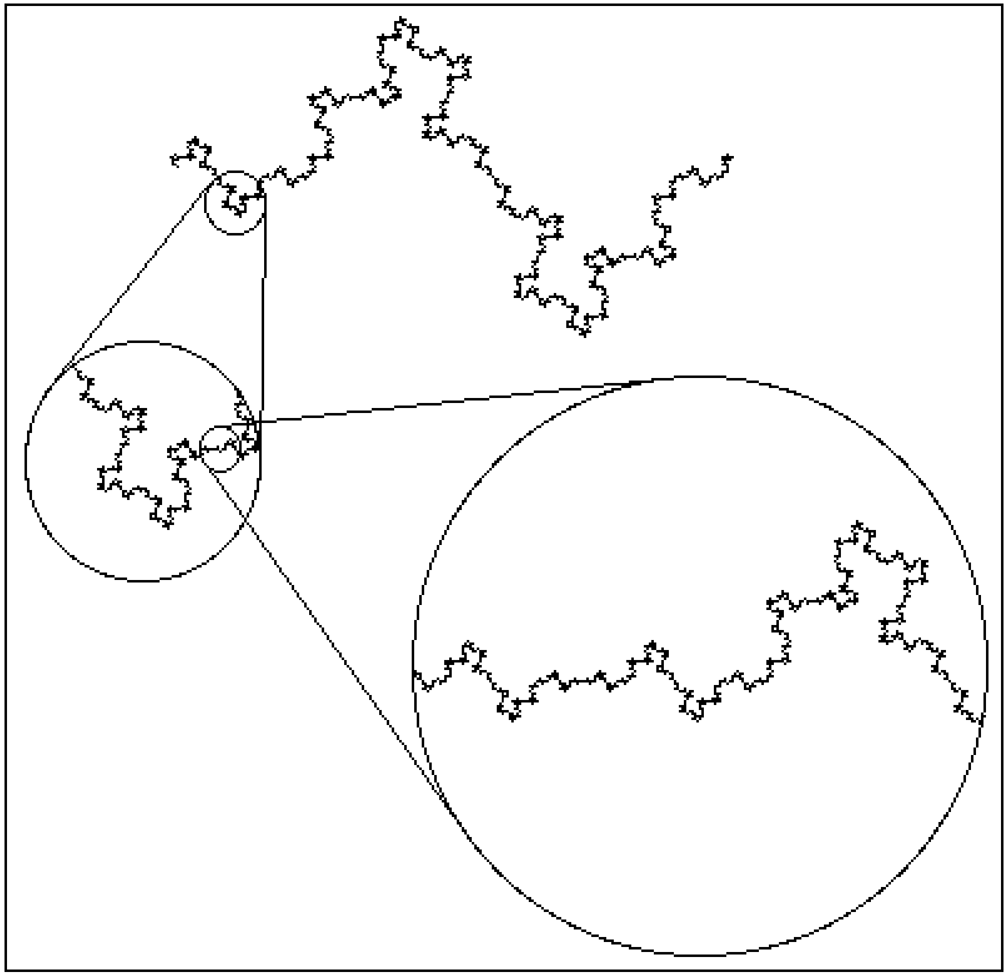
Échelle et géographie théorique

- Toute **mesure** sur un « objet géographique » dépend d'une échelle de référence et d'une résolution (de l'appareil puis de l'information la plus fine utilisée).
- La mesure doit porter sur **attribut totalement défini** et représentatif de « l'objet » et plus vraisemblablement du problème choisi. Sa valeur numérique doit ensuite être traitée.
- **L'objectif générique** est de **définir la relation** qui existe entre 2 entités (échelles, systèmes …)

Échelle et fractalité

- Définition
  - Une fractale est une entité étudiée structurée en échelle
  - C'est le **mode d'organisation le plus général** de, et dans l'univers
  - Ceci explique l'ubiquité des fractales
  - D'un point de vue mathématique, les objets décrits ci-dessous sont appelés « fractals »

Organisation en échelles et zooms discrets sur une courbe fractale



Courbe de Von Koch (D_F constante)

L_0

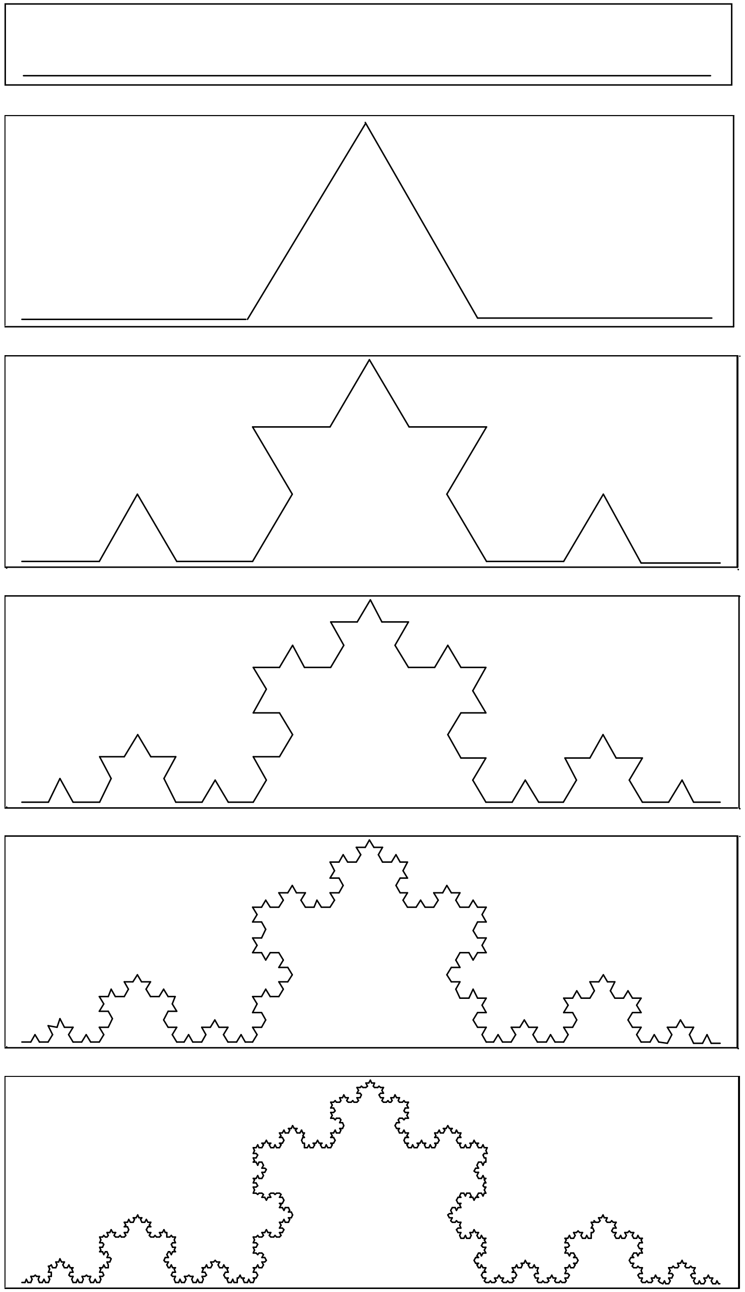
$L_1 = L_0\,(p/q)$

$L_2 = L_0\,(p/q)^2$

$L_3 = L_0\,(p/q)^3$

$L_4 = L_0\,(p/q)^4$

$L_\infty = L_0\,(p/q)^\infty$



F_0

F_1

F_2

F_3

F_4

F_∞

Générateur:

$p = 4$

$q = 3$

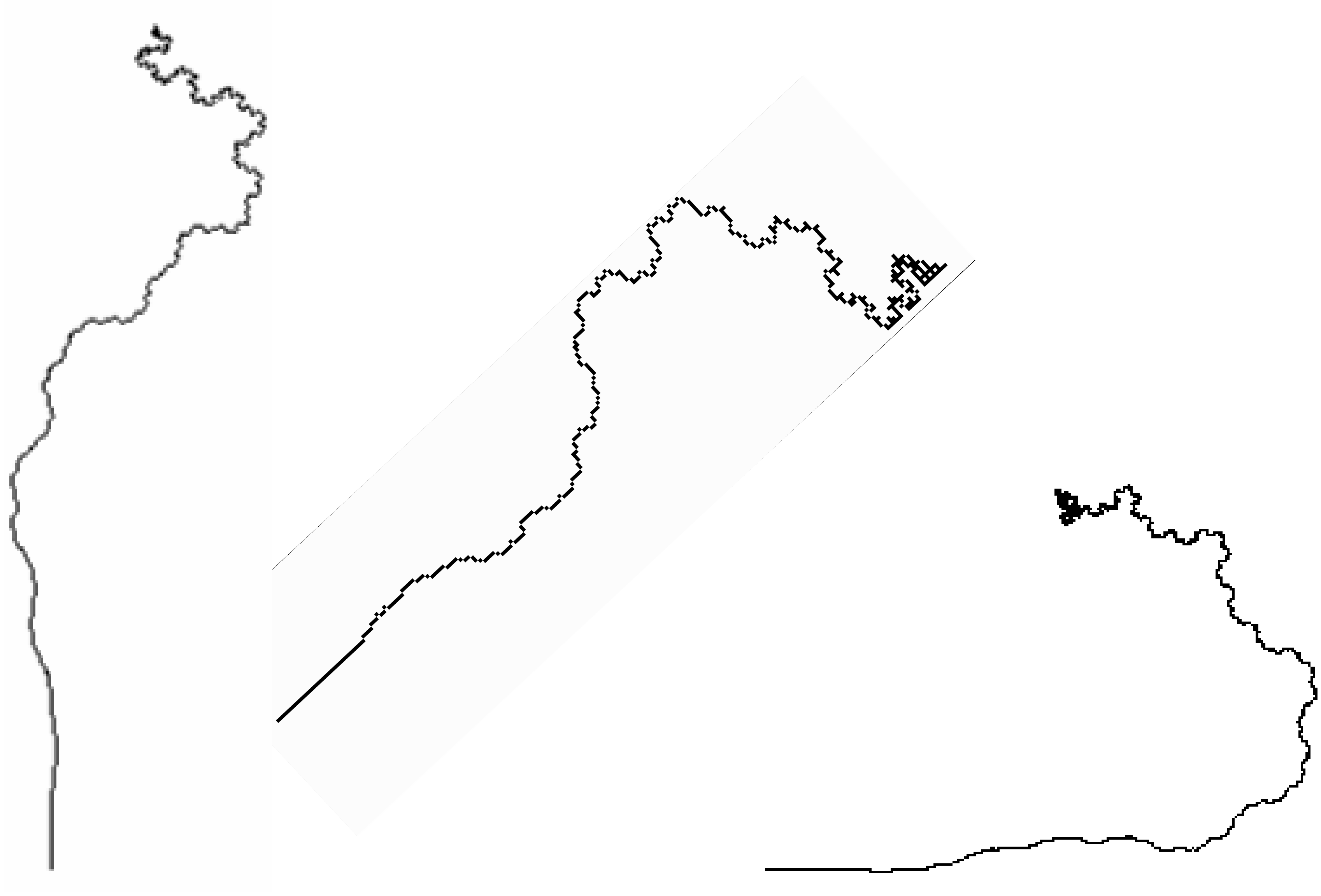
Dimension fractale:

$$\boxed{D_F = \frac{\log p}{\log q}}$$

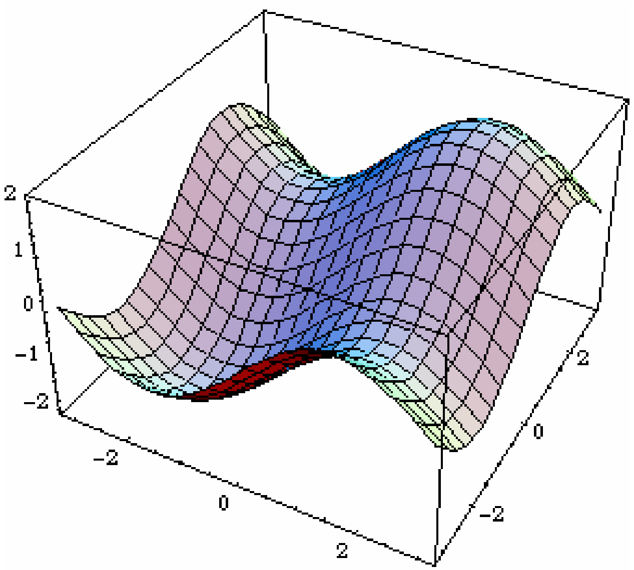
$$\varepsilon = \lambda \times q^{-n}$$

$$\boxed{L_n = L_0 \left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right)^{D_F - 1}}$$

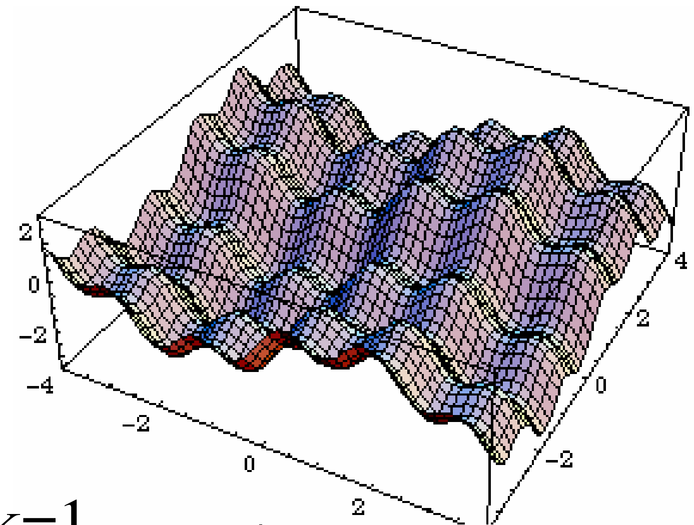
Courbes de dimension fractale variable
(dans l'espace, le long de la courbe)



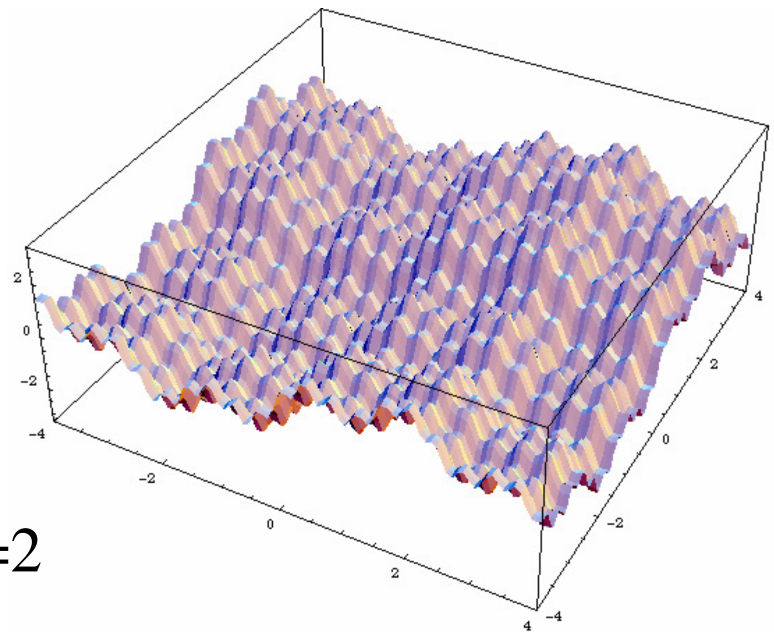
En 2D : surface fractale



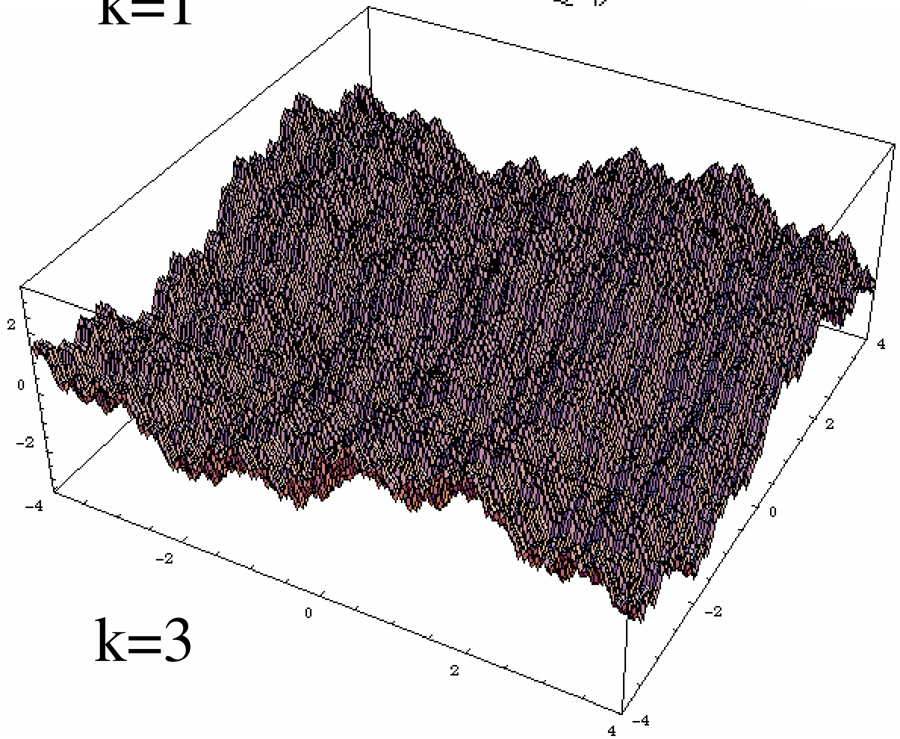
k=0



k=1



k=2



k=3

Échelles numériques et cartographie

- **Échelle cartographique** : rapport entre la mesure d'une distance sur la carte et la mesure d'une distance sur le terrain
  - C'est un simple **rapport homothétique**
- Résolution : notion générique qui désigne l'échelle limite de l'information dont on dispose sur un objet géographique (taille d'un pixel par ex.).
  - Pour une carte, la résolution est donnée par les possibilités techniques de dessin (environ 1 millimètre)

Fractale et géographie
Carte géographique 1

- En géographie, la longueur mesurée sur une carte entre deux points varie en fonction de l'échelle à laquelle on effectue la mesure. Le résultat de la mesure dépend donc de la résolution ε définie, en cartographie, de la manière suivante :

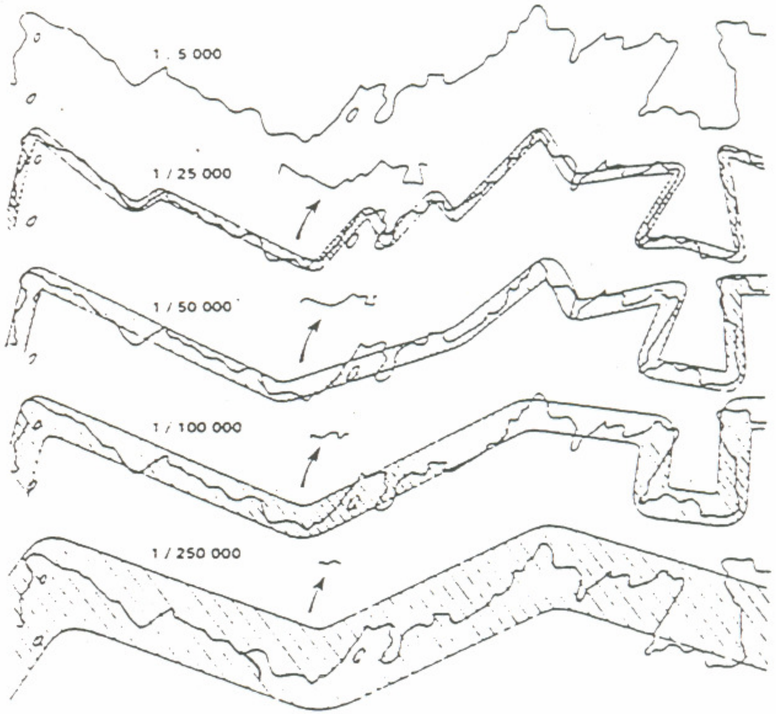
$$\varepsilon^{D_T} = \frac{L(\varepsilon) \rightarrow \text{longueur normée correspond à une mesure sur le terrain}}{N(\varepsilon) \rightarrow \text{longueur correspondant sur la carte (ou résolution)}}$$

- Autrement dit :

$$L(\varepsilon) = N(\varepsilon) \times \varepsilon^{D_T}$$

- **Comment varie la longueur mesurée en fonction de l'échelle à laquelle on la mesure ?**

Fractale et géographie
Carte géographique 2



16.1. Comment on généralise

La bande hachurée représente le nouveau tracé de la côte, en prenant une échelle de plus en plus petite — ou une plume de plus en plus grosse. Tiré de R. Cuénin, *Cartographie générale*, Eyrolles.

- Solution la plus simple :

$$L(\varepsilon) = N_0 \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \right)^{D - D_T}$$

où N_0 correspond à la longueur de référence et ε_0 correspond à la résolution initiale (le millimètre pour les cartes)

D : dimension fractale

D_T : dimension topologique

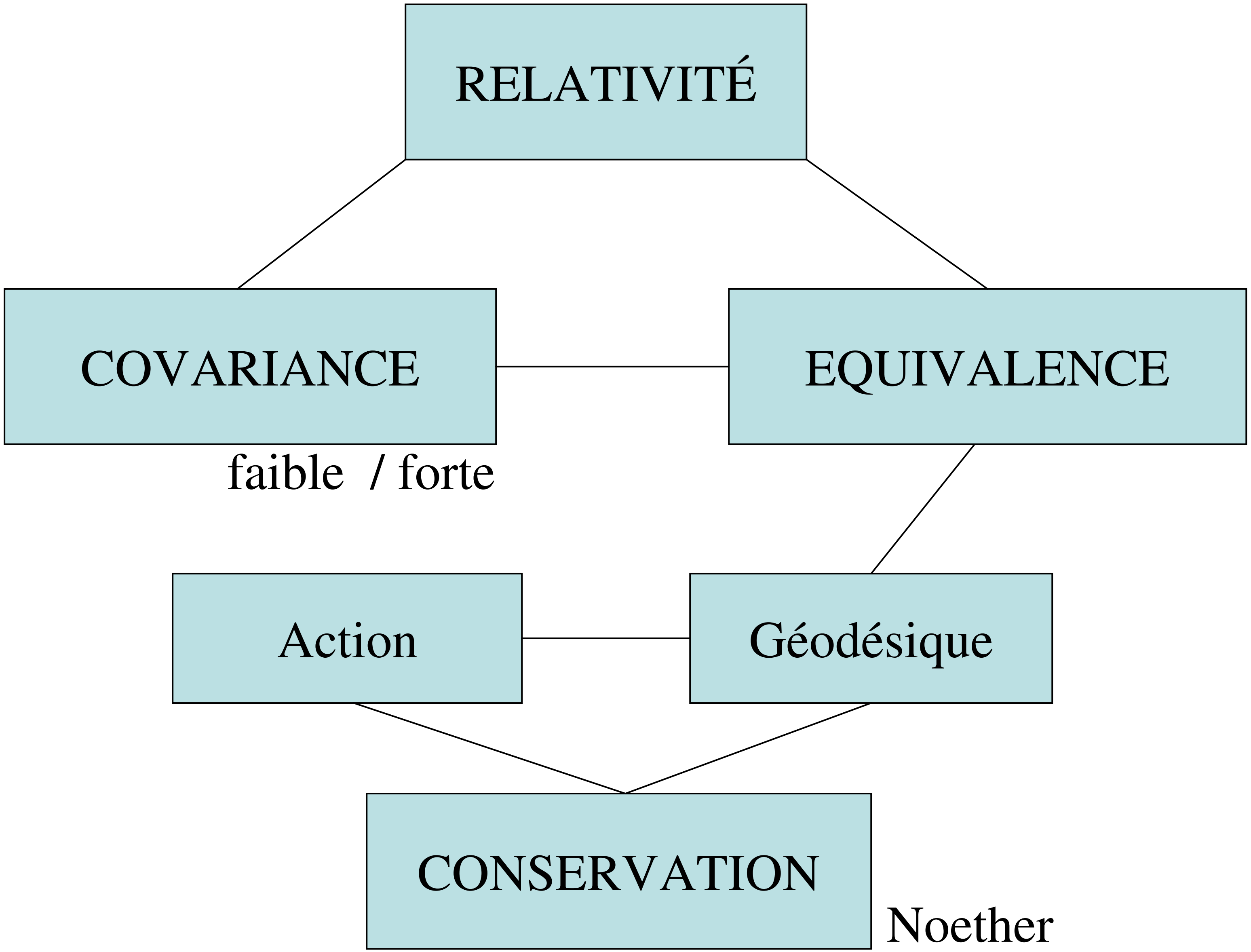
Cf. méthode dite du compas

2. La théorie de la relativité d’échelle

Relativité d'échelle
Principes premiers

1. Le principe de relativité :
   - Philosophie : tout phénomène est définie relativement à un système de référence
   - Mathématique : les lois fondamentales sont valides quel que soit l'état du système de coordonnées
2. Le principe de covariance correspond à l'invariance de forme des équations sous les changements de système de coordonnées
3. Le principe d'équivalence correspond aux conditions de relativité de tel ou tel « objet » d'étude (gravitation en relativité générale d'Einstein)

Principes premiers



Relativité d’échelle

Continuité

+Abandon de l’hypothèse de différentiabilité de l’espace-temps

Généraliser la relativité du mouvement ?

Transformations de coordonnées non-différentiables

Théorème

Dépendance explicite des coordonnées en fonction des variables d’échelle + divergence

$$X \to X(\varepsilon)$$

$$f(X) \to f[X(\varepsilon), \varepsilon]$$

ESPACE-TEMPS FRACTAL

$\partial/\partial X$ $\quad$ $\partial^2/\partial X^2$

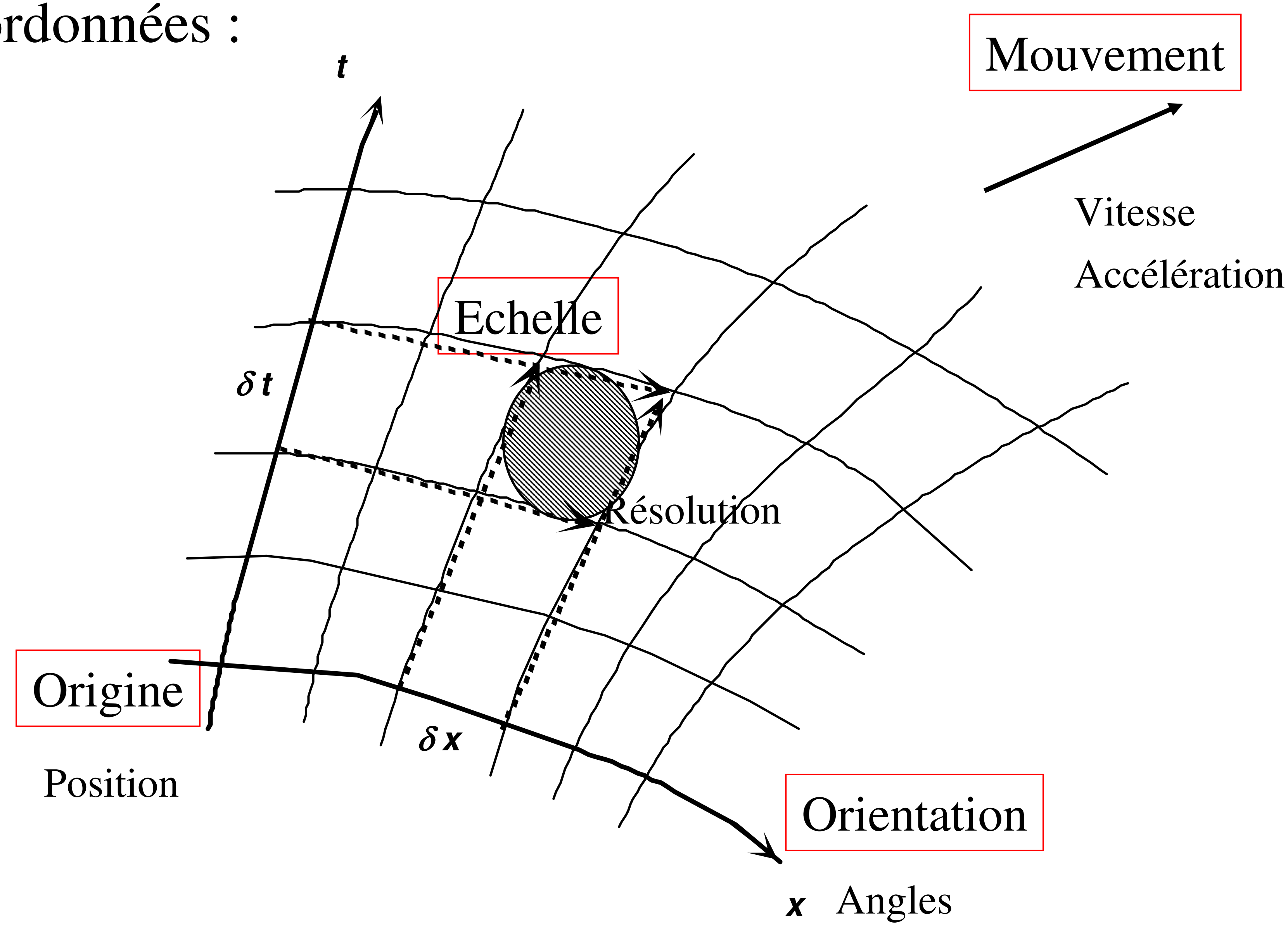
$\partial^2/(\partial \ln \varepsilon)^2$

$\partial/\partial \ln \varepsilon$

$\partial^2/\partial X\, \partial \ln \varepsilon$

Compléter les lois de la physique par des lois d’échelle

États d’un système de coordonnées :



Relativité d’échelle
Définition

Relativité	Variables qui caractérisent l’état du système de coordonnées	Variables qui définissent le système de coordonnées
Mouvement	Vitesse Accélération	Espace Temps
Échelle	Résolution (vitesse d’échelle) Accélération d’échelle	Logarithme de la longueur sur une fractale Dimension fractale variable

Relativité d'échelle (RE)

- Objectif :
  – Trouver les lois régissant les transformations dans l'espace des échelles (au sens des changements de résolution)
  – Trouver les lois du mouvement dans un espace temps fractal (mécanique de type quantique)

RE : Postulat de base

- Description des lois de transformation d’échelle par des équations différentielles agissant dans l’espace des échelles

- Zoom différentiel ; effet de ce zoom sur une variable

RE : Méthode

- Construction d'un opérateur de dilatation (méthode de Gell-Mann-Lévy)

$$\varepsilon' \rightarrow \varepsilon(1+\mathrm{d}\rho)$$

$$L(\varepsilon') = L(\varepsilon(1+\mathrm{d}\rho)) = L(\varepsilon) + (\varepsilon + \varepsilon\mathrm{d}\rho - \varepsilon)\frac{\partial L(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} = L(\varepsilon) + \boxed{\frac{\partial}{\partial \ln \varepsilon}} L(\varepsilon)\mathrm{d}\rho$$

- Méthode par étapes
  - Recherche des lois d'échelle par un développement limité de Taylor

$$\frac{\mathrm{d}\,L}{\mathrm{d}\ln \varepsilon} = \beta(L) = a + bL + cL^2 + dL^3 + \ldots$$

Quelles sont les lois de transformation d'échelle de 1er ordre, possibles ?

- Mathématiquement, la Relativité d'Echelle (RE) de LN (1993 ; 1998 ; 2011 sous presse) montre que la possibilité de lois d'échelle est infinie
- Physiquement, la RE montre également qu'elles sont limitées à quelques cas

  1. La loi sans transition (invariance d'échelle)
  2. La loi avec une transition fractal – non fractal
  3. La loi avec deux transitions fractal – non fractal
  4. Etc.

Relativité d'échelle et géographie

- Invariance d'échelle

$$\frac{\mathrm{d}\,L}{\mathrm{d}\ln\varepsilon} = bL \Leftrightarrow L(\varepsilon) = L_0 \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)^{D-D_T}$$

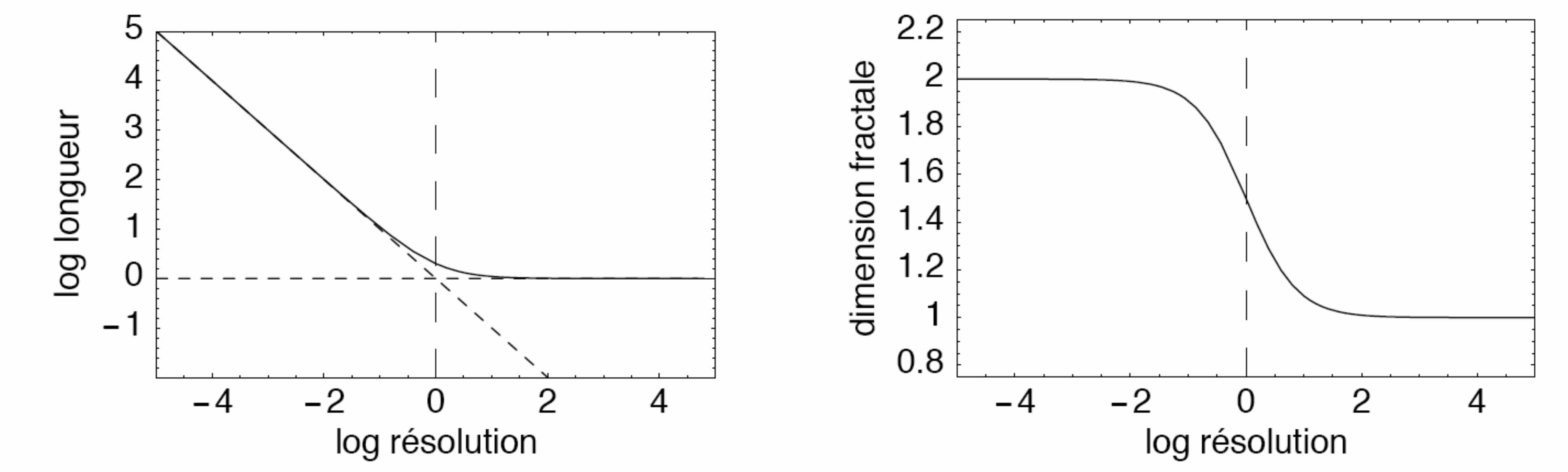
- Loi avec une transition

$$\frac{\mathrm{d}\,L}{\mathrm{d}\ln\varepsilon} = a + bL \Leftrightarrow L(\varepsilon) = L_0 \left[1 + \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)^{D-D_T}\right]$$

- Loi avec deux transitions

$$\frac{\mathrm{d}\,L}{\mathrm{d}\ln\varepsilon} = a + bL + cL^2 \Leftrightarrow L(\varepsilon) = L_0 \left[\frac{1 + \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)^{D-D_T}}{1 + \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\right)^{D-D_T}}\right]$$

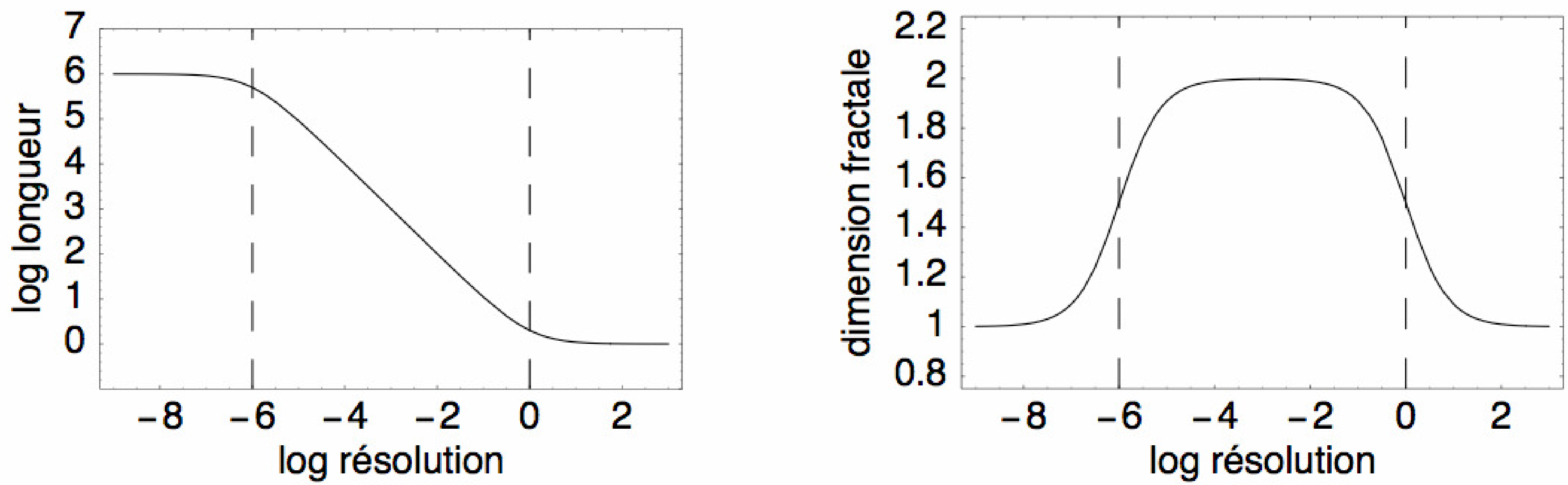
Loi d'échelle auto-similaire (D_F constante) puis transition Fractal – Non-Fractal



Solution de l'équation différentielle d'échelle

$$dL/d \ln r = a + b\, L$$

Loi d’échelle avec 2 transitions



Solution de l’équation différentielle d’échelle

$$dL\,/d \ln r = a + b\,L + c\,L^2$$

Équation du 2ème ordre

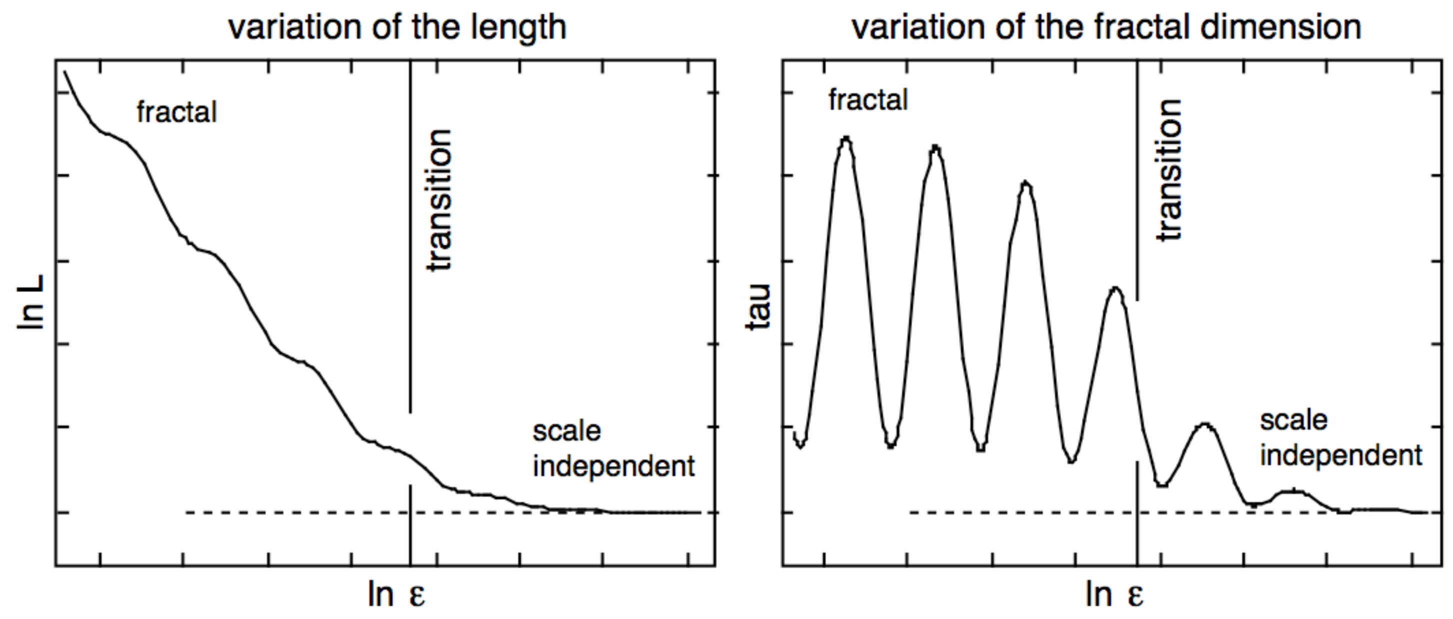
- Dimension fractale variable

- Dynamique d'échelle

Loi log-périodique

$$\mathcal{L}(\varepsilon) = \mathcal{L}_0 [1 + (\lambda/\varepsilon)^{\nu} \, e^{b \cos(\omega \ln(\varepsilon/\lambda))}]$$

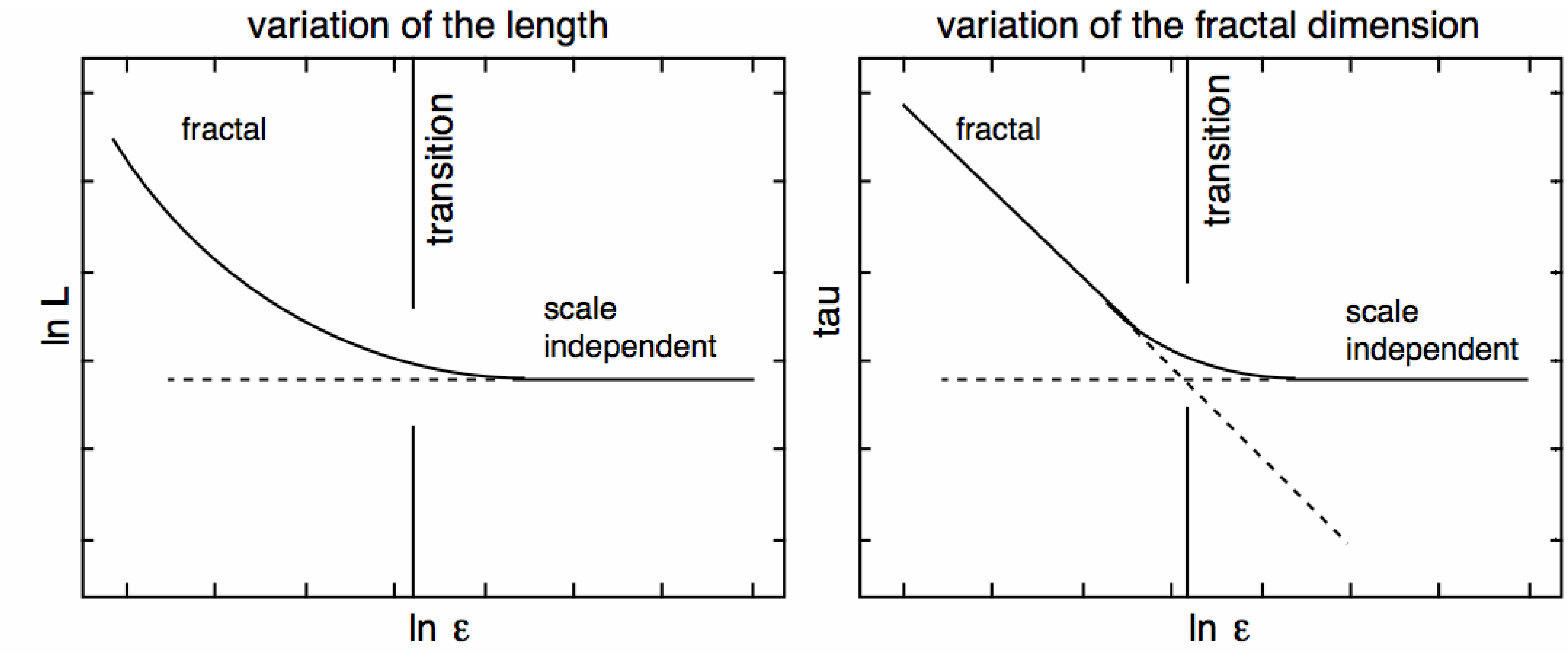
(Petites fluctuations)



Dépendance d'échelle de la longueur et de la dimension d'échelle effective dans le cas d'un comportement log-périodique (invariance d'échelle discrète, exposant complexe) avec transition Fractal – Non - Fractal.

« Dynamique d'échelle » : force d'échelle constante

$$\ln\left(\frac{\mathcal{L}}{\mathcal{L}_0}\right) = \frac{1}{2G}\ln^2\left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right) \qquad \delta = \frac{1}{G}\ln\left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right) \text{ (asymptotique)}$$



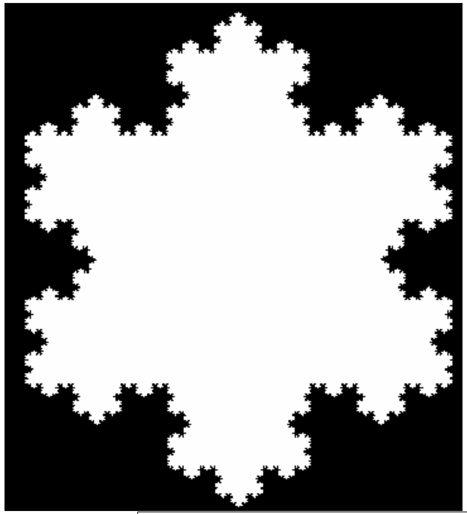
Dépendance d'échelle de la longueur et de la dimension d'échelle effective dans le cas d'une 'force d'échelle' constante:

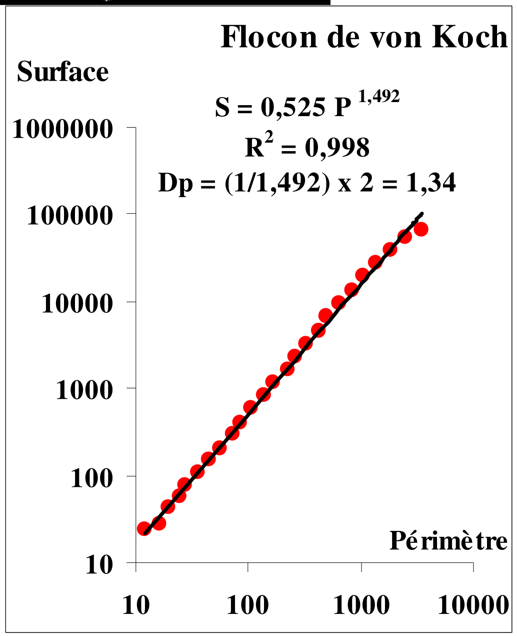
$$\boxed{\frac{d^2 \ln \mathcal{L}}{d\,\delta^2} = G}$$

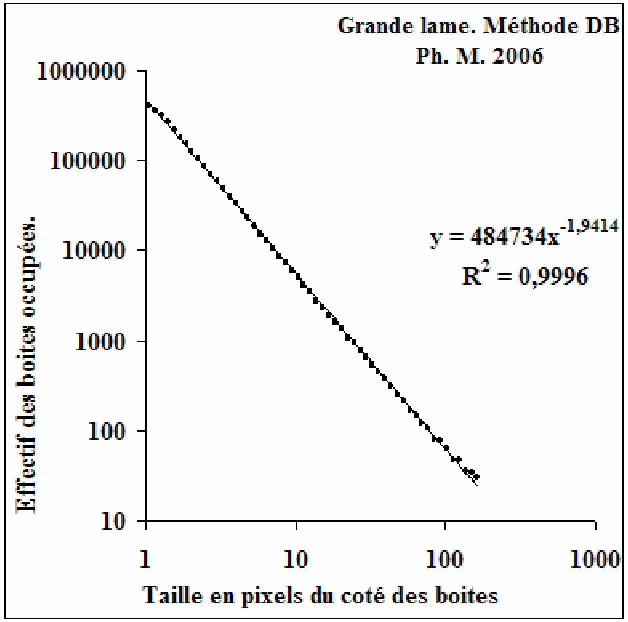
3. Application récente de la RE en géographie

(indépendance et dépendance d'échelle

Invariance d'échelle : flocon de von Koch et lame de roche en siphon (calcaire corrodé)





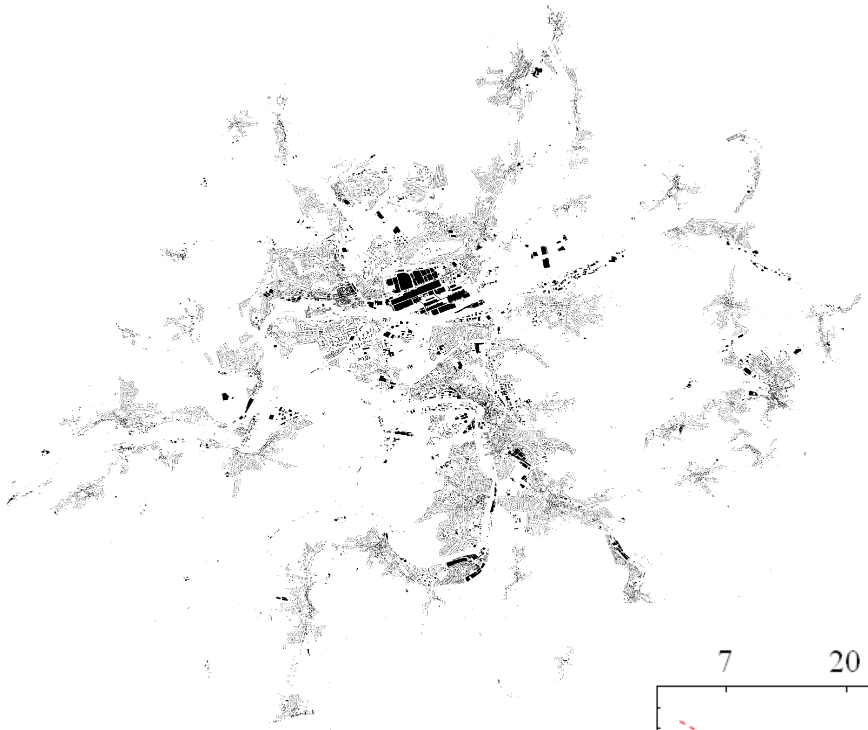


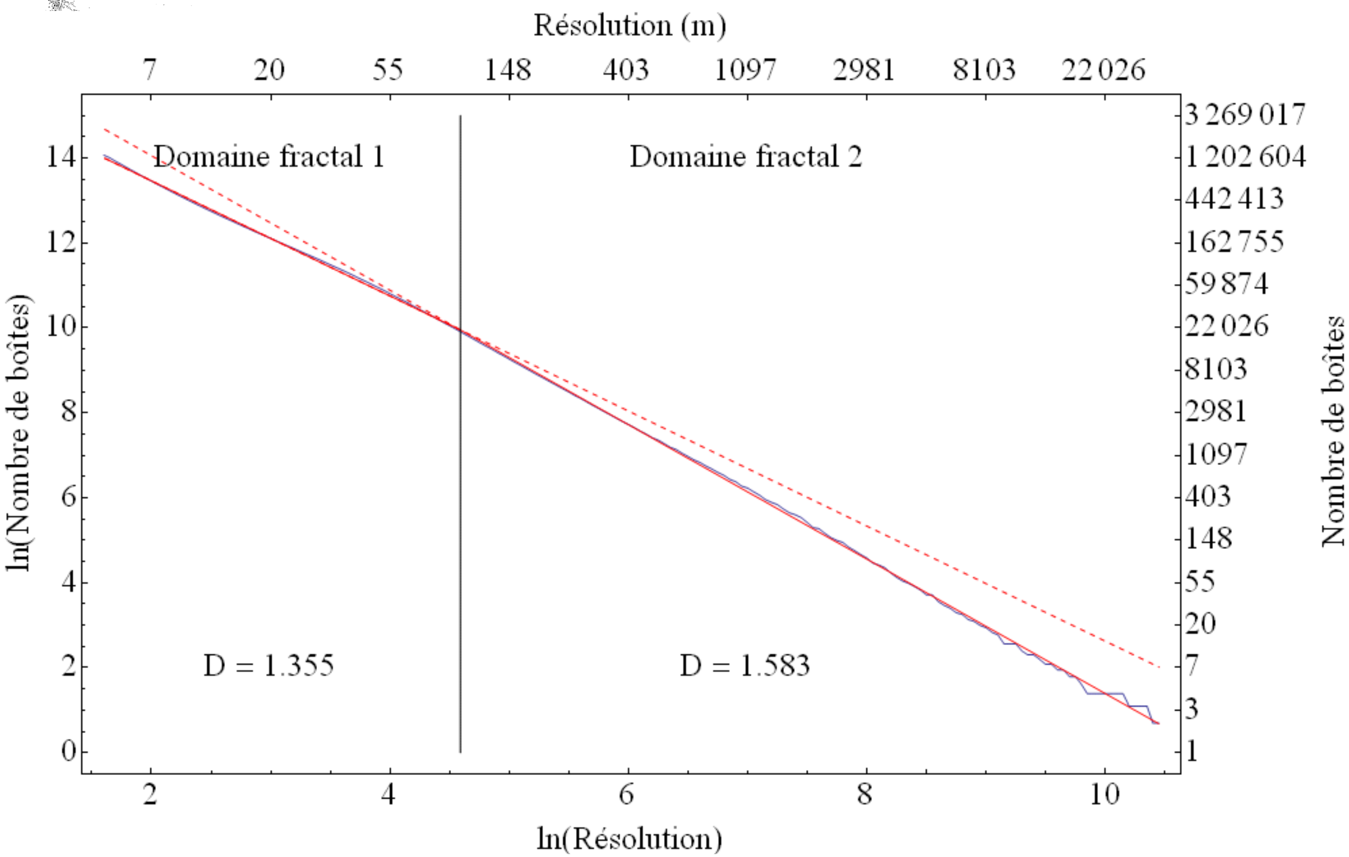
Cas de multifractalité

(transition Fractal – Fractal)

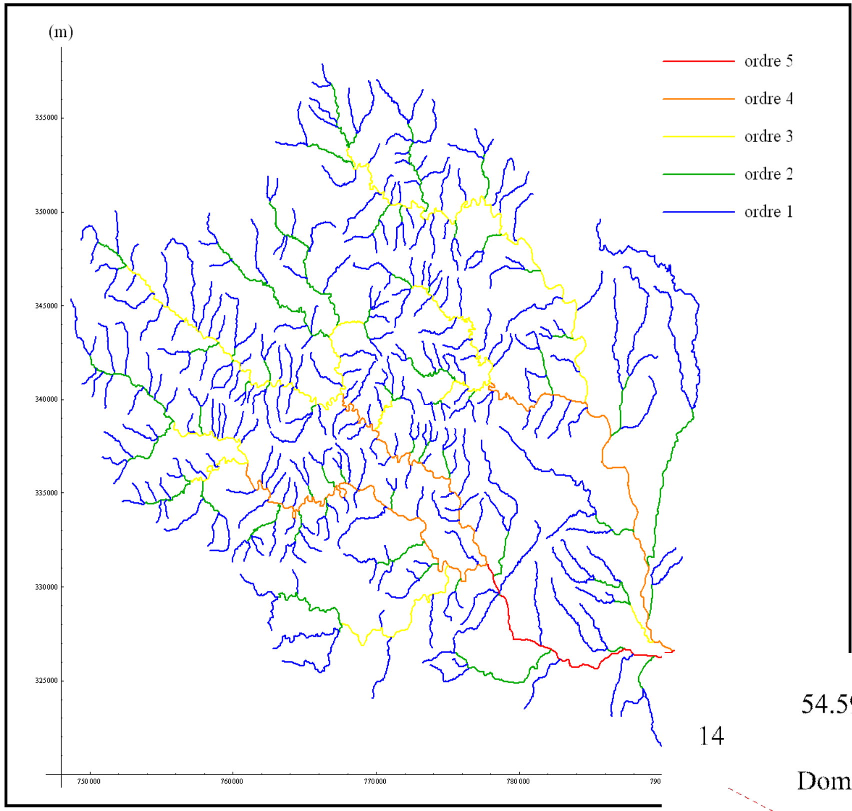
La ville de Montbéliard

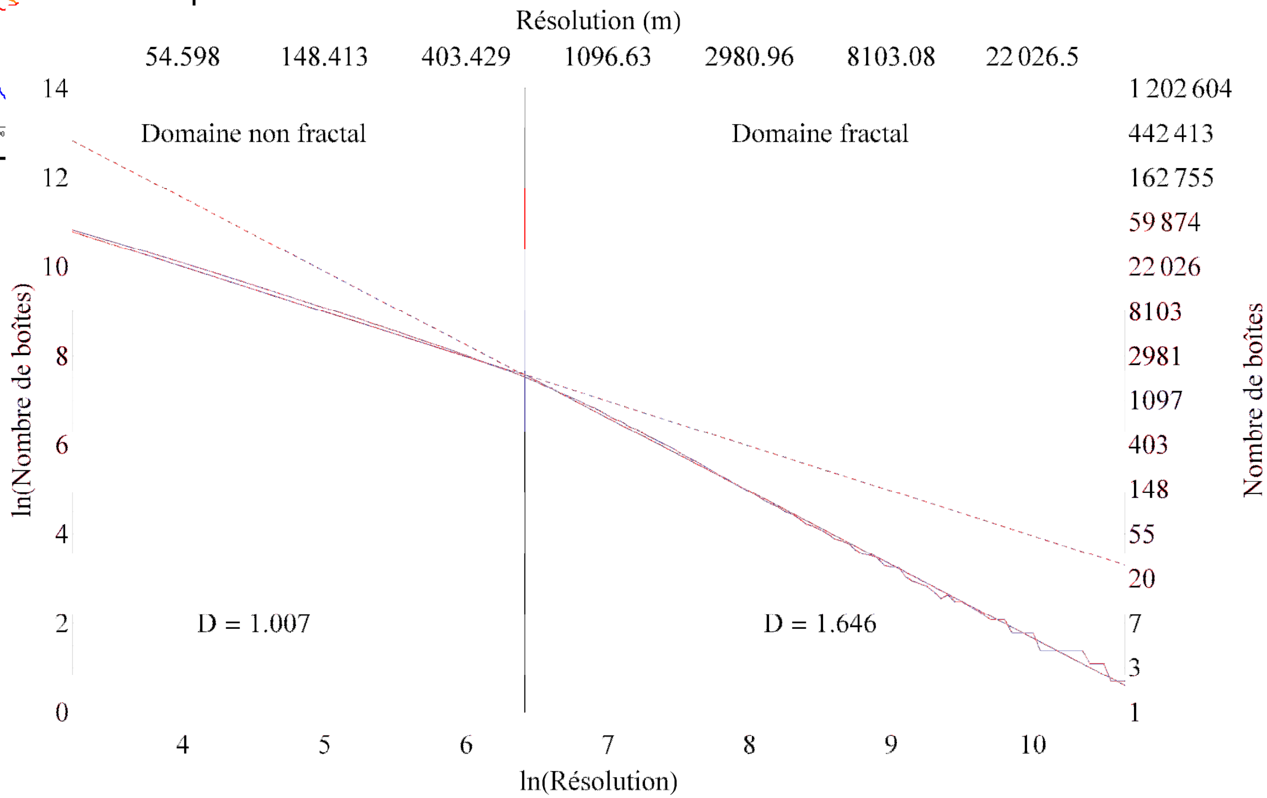
(méthode des boîtes)



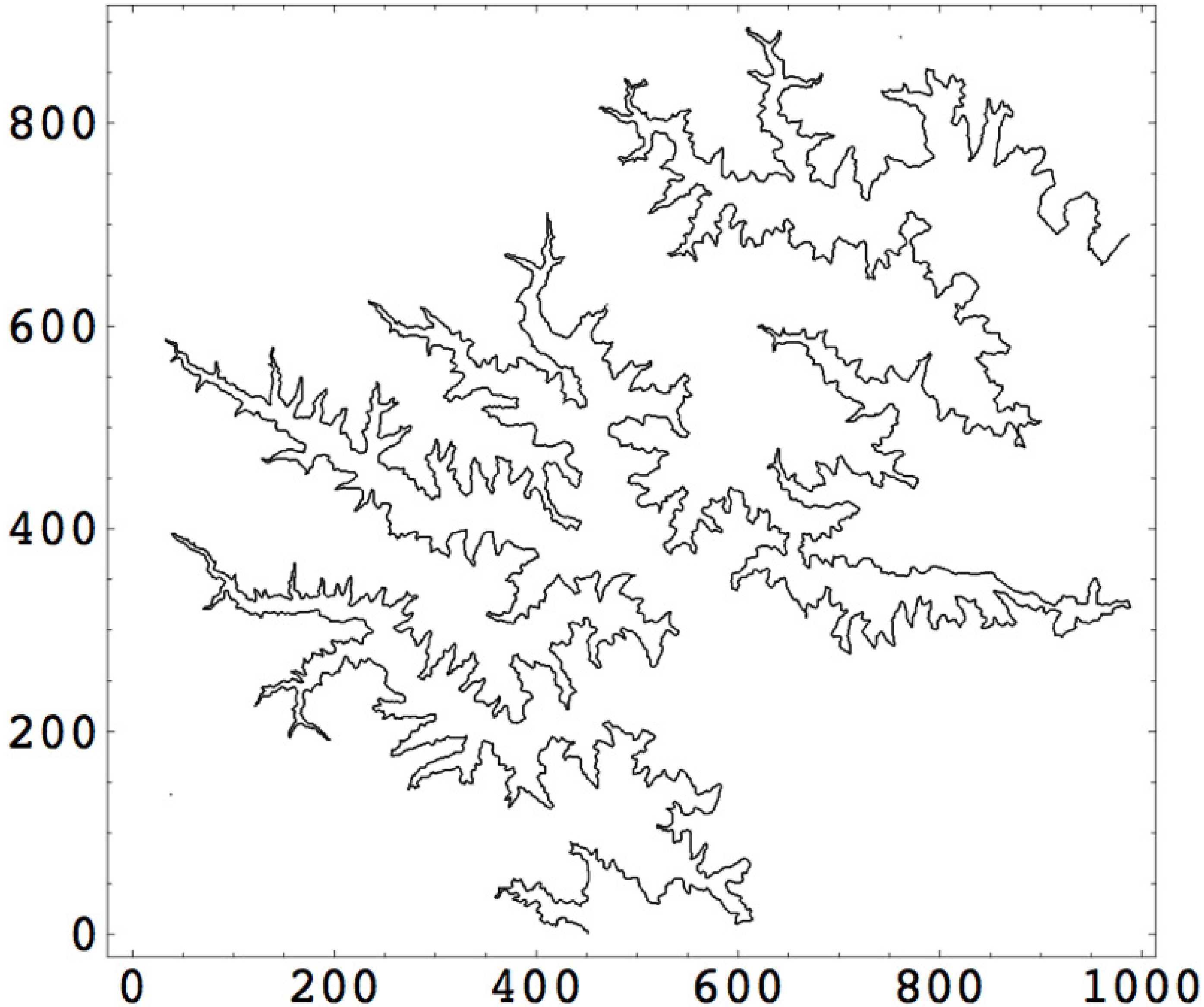


Transition Fractal – Non - Fractal : le réseau hydrographique du Gardon (échelle de coupure)

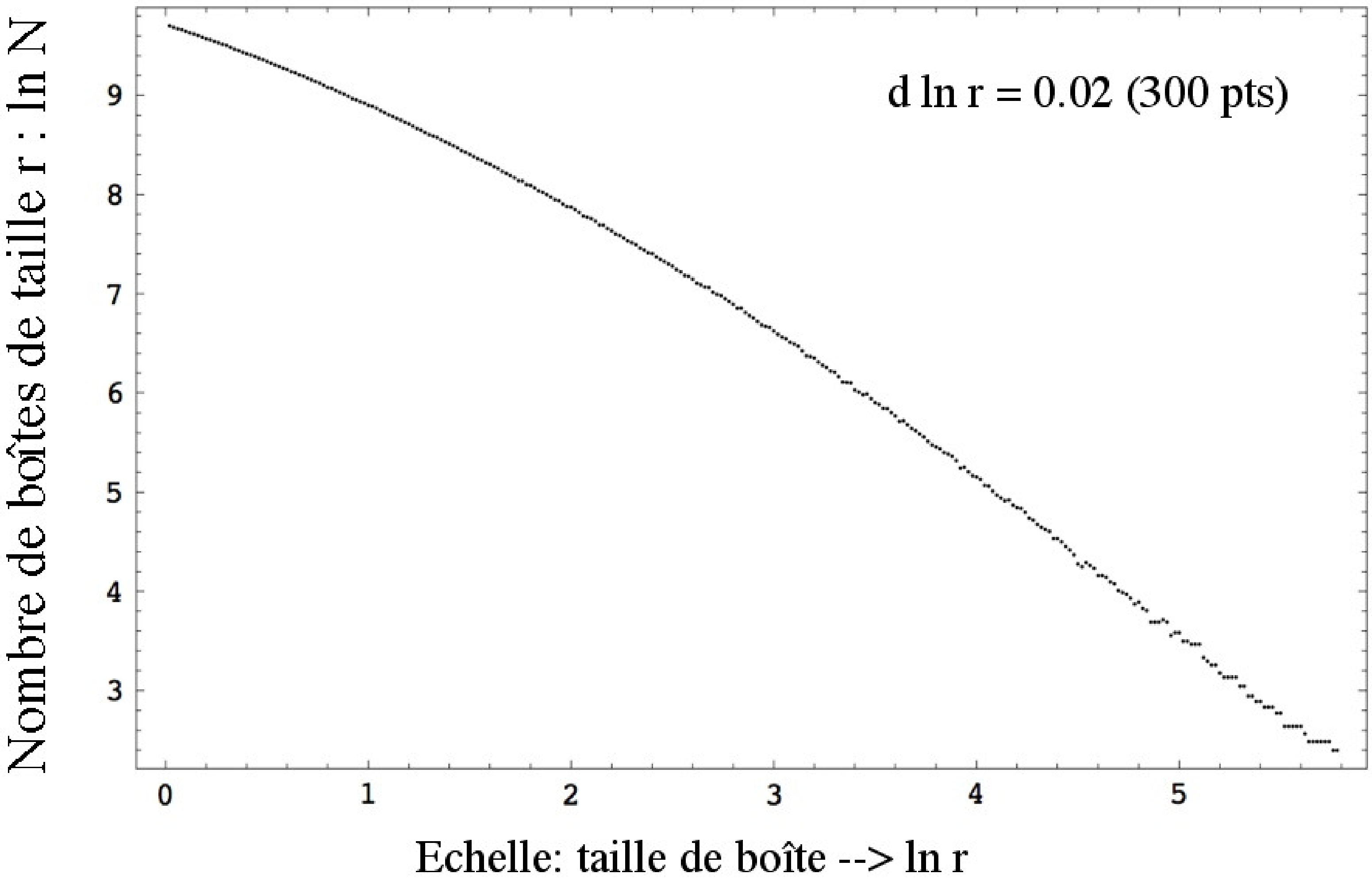




Gardon: courbe de niveau 450 m

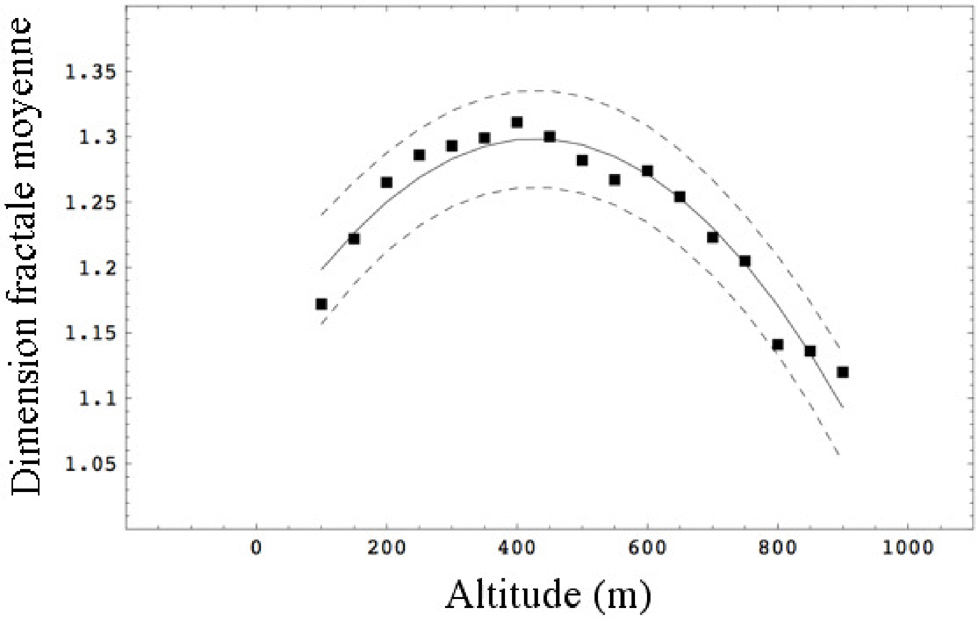


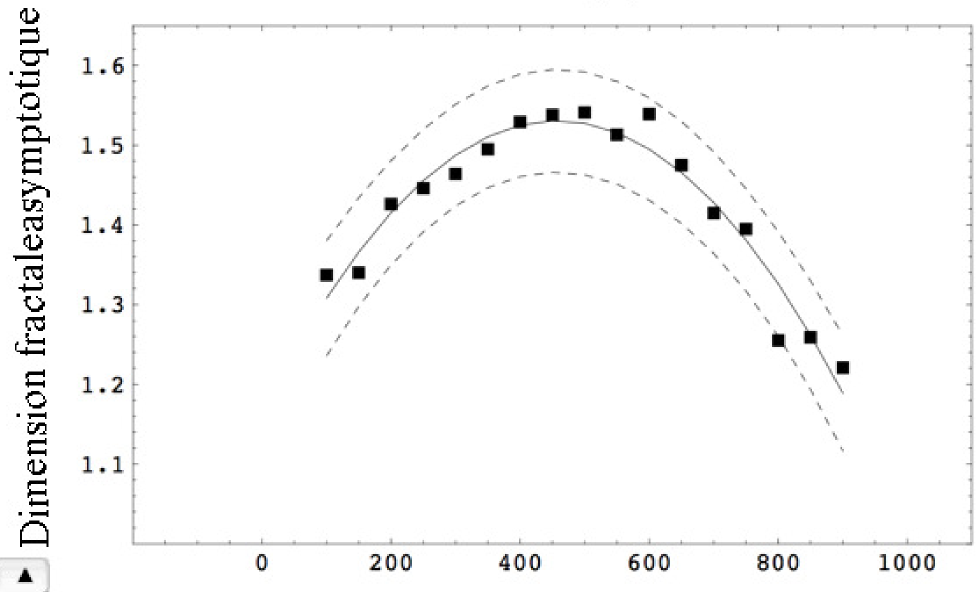
Gardon: CN 450, comptage de boîte



Martin 2004: existence d'une « courbure » (écart à l'invariance d'échelle) --> dimension fractale variable

Gardon: Dépendance de la dimension fractale en fonction de l'altitude



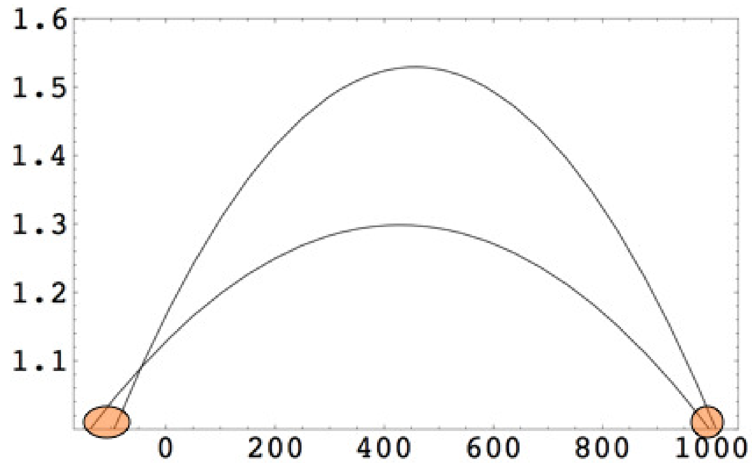


Modélisation:

$D = 1$: non fractal, lisse ->

(i) plaine: $h \approx -120$ m (littoral au Würm)

(ii) sommet: $h \approx 1000$ m



Deux points fixés -> parabole

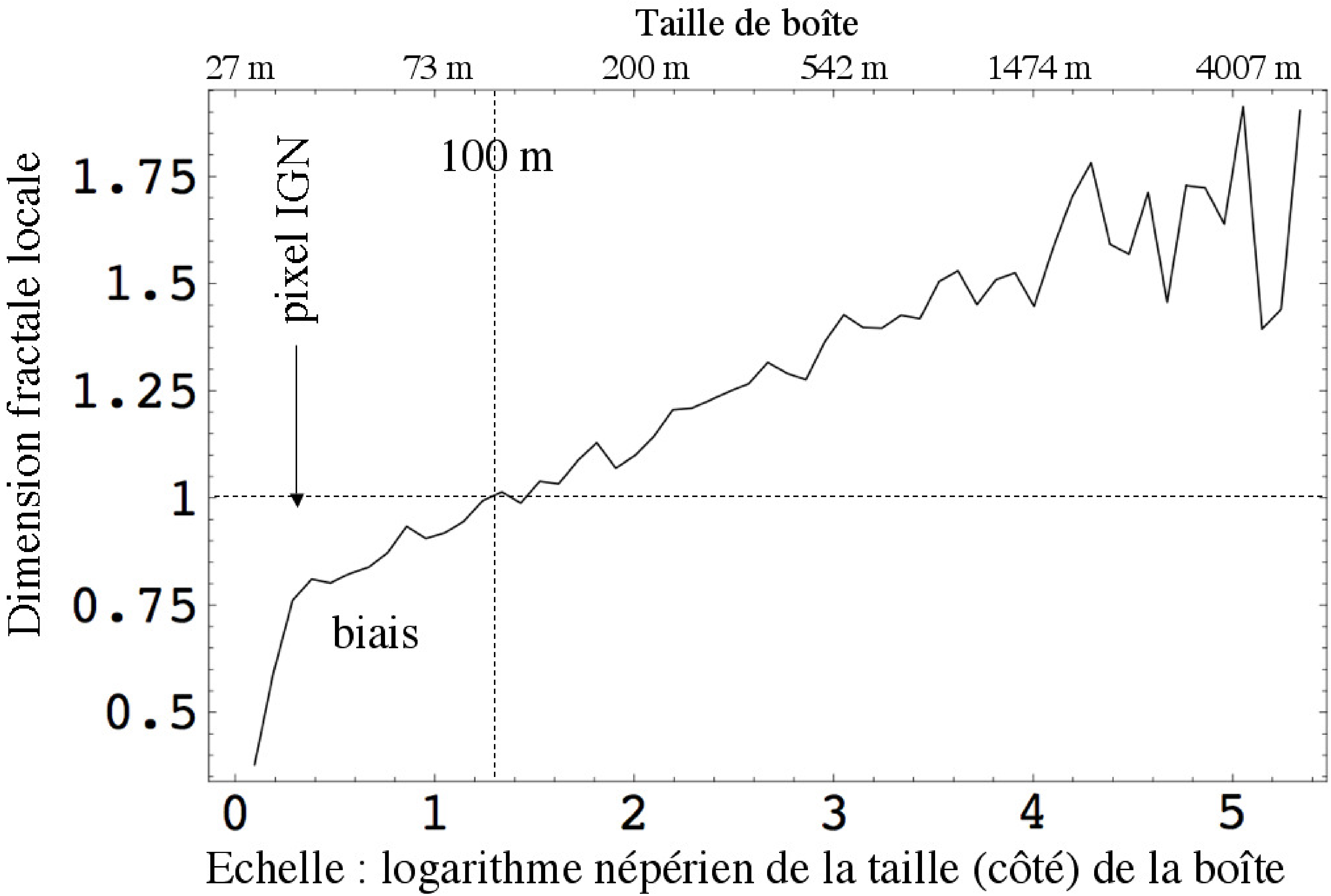
$D(h) = 1 + a\,(h - h_1)(h - h_2)$

Mesuré:

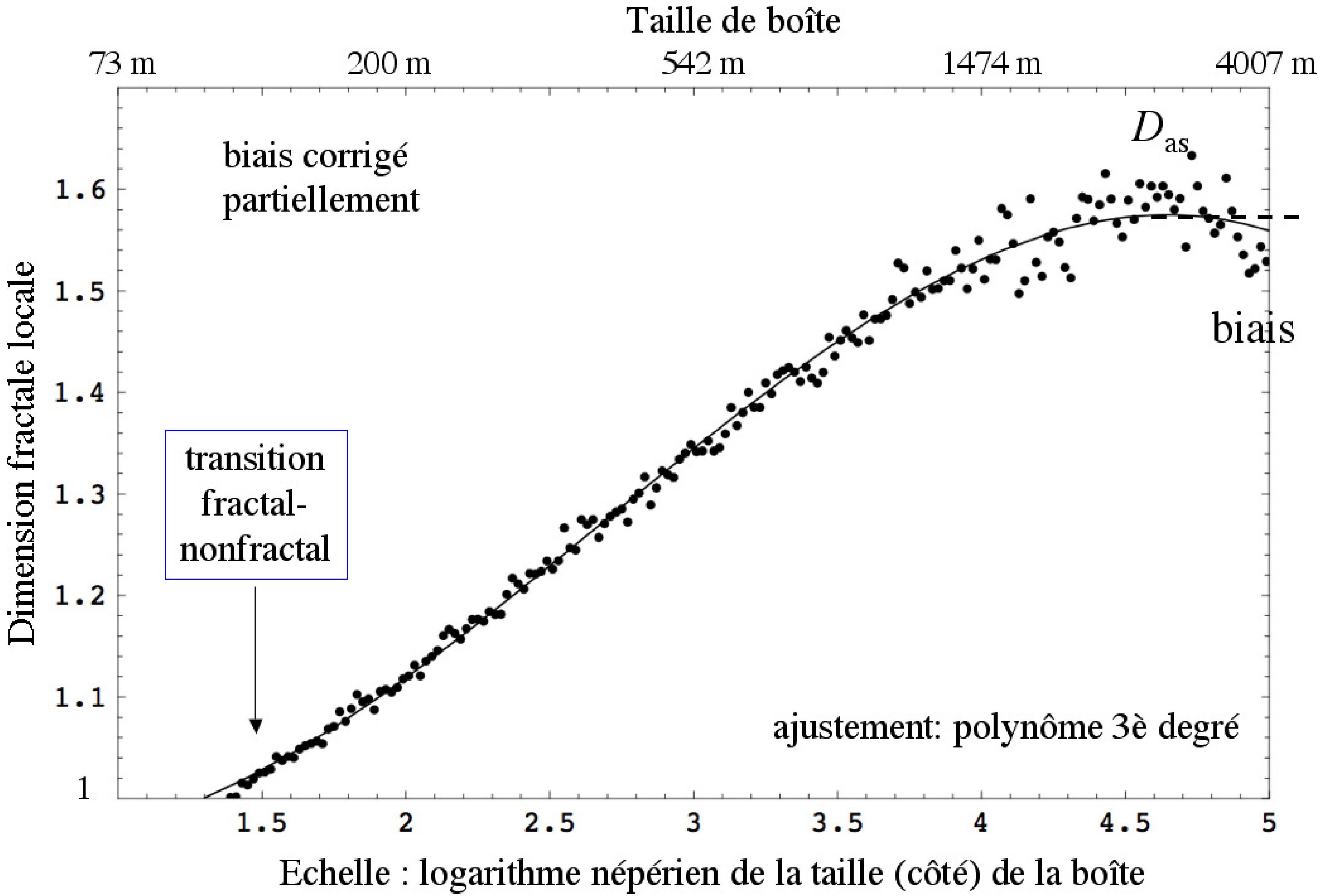
$$h_1 = -(117 \pm 30)\ \text{m}$$

$$h_2 = (1002 \pm 28)\ \text{m}$$

Gardon: dépendance d'échelle de la dimension fractale

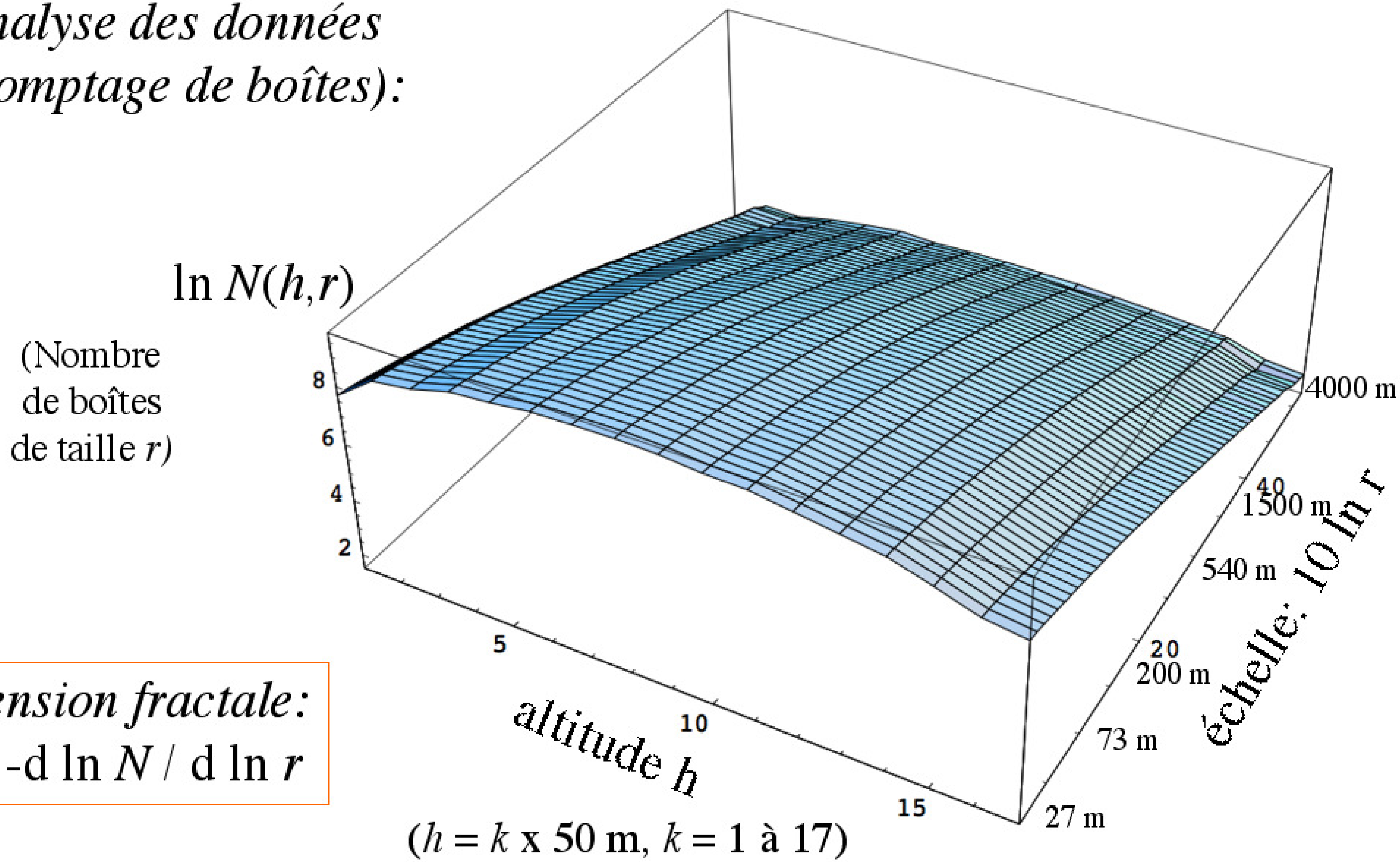


Gardon: dépendance d'échelle de la dimension fractale.2



Gardon: dépendance combinée de la dimension fractale en fonction de l'altitude et de l'échelle, mesures

Analyse des données (comptage de boîtes):

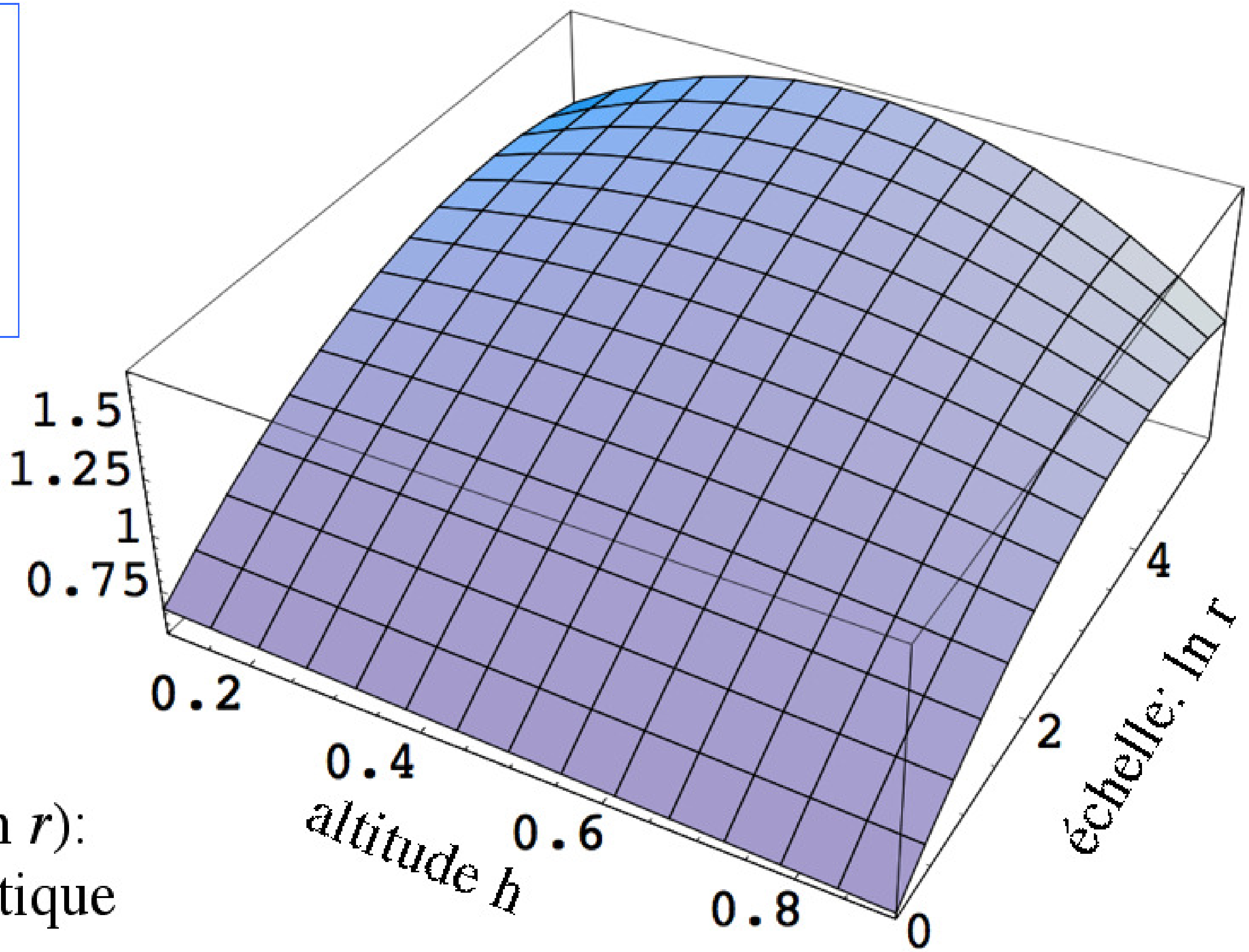


Dimension fractale:
$D_F = -\mathrm{d} \ln N / \mathrm{d} \ln r$

Gardon: dépendance combinée de la dimension fractale en fonction de l'altitude et de l'échelle, modèle

$\ln r = 0$	$r = 27\text{m}$
$\ln r = 0.63$	$r = 50\text{m}$
$\ln r = 1.32$	$r = 100\text{m}$
$\ln r = 2.93$	$r = 500\text{m}$
$\ln r = 3.62$	$r = 1000\text{m}$
$\ln r = 5.23$	$r = 5000\text{m}$

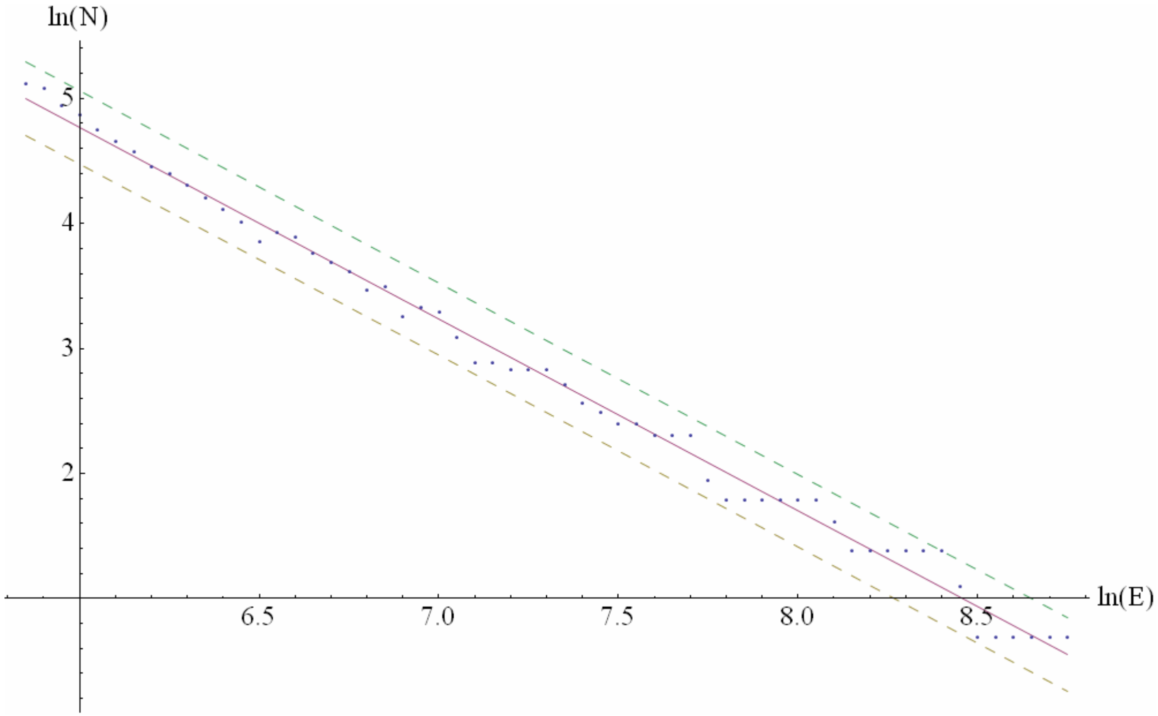
dimension fractale D_F



Loi ajustée ($x = \ln r$):
double loi quadratique

$$D(x,h) = 0.679 - 0.1097\,h + 0.3243\,x - 0.04746\,x^2 + 0.09616\,h\,x^2 - 0.09943\,h^2\,x^2$$

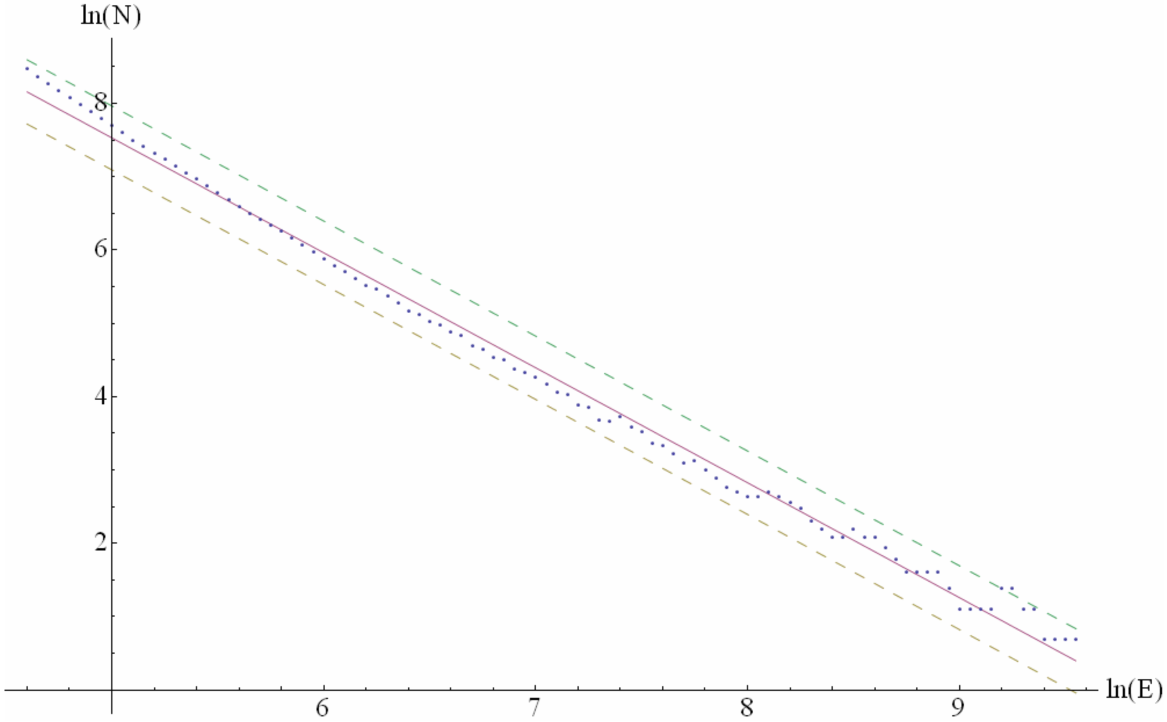
Avignon : variation de l'information
Image 1 : $\varepsilon = 344{,}8$ m ; Ln(E) de 6 à 8,5



À l'échelle

$D = 1{,}533 \pm 0{,}016$

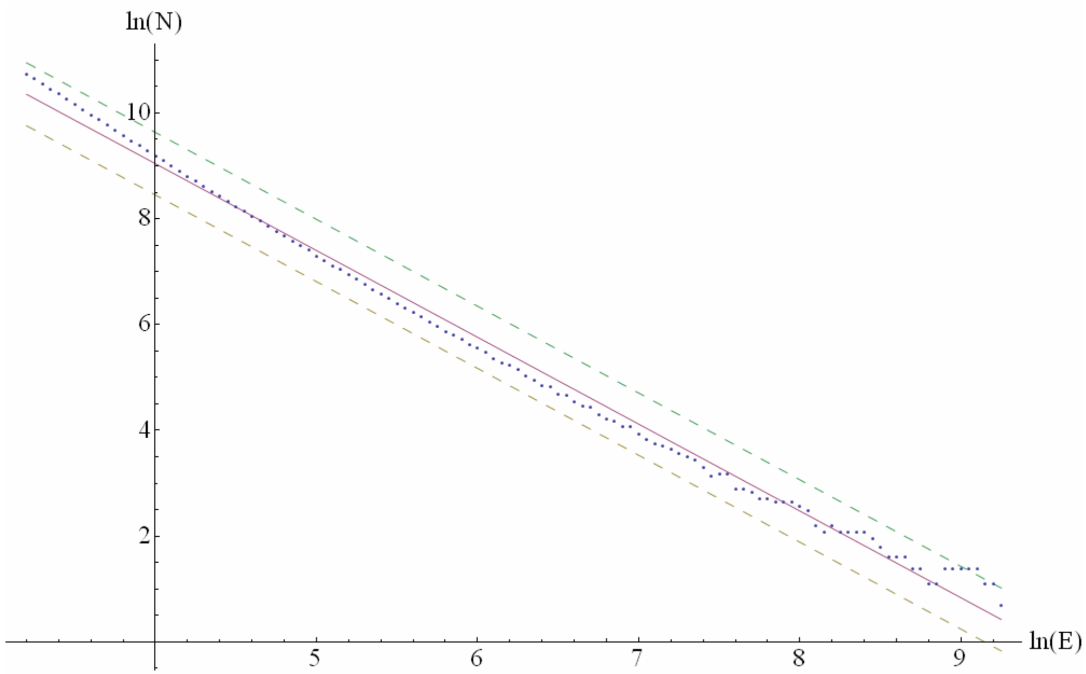
Avignon : variation de l'information Image 2 : ε = 99 m ; Ln(E) de 6 à 10



À l'échelle

$D = 1{,}568 \pm 0{,}011$

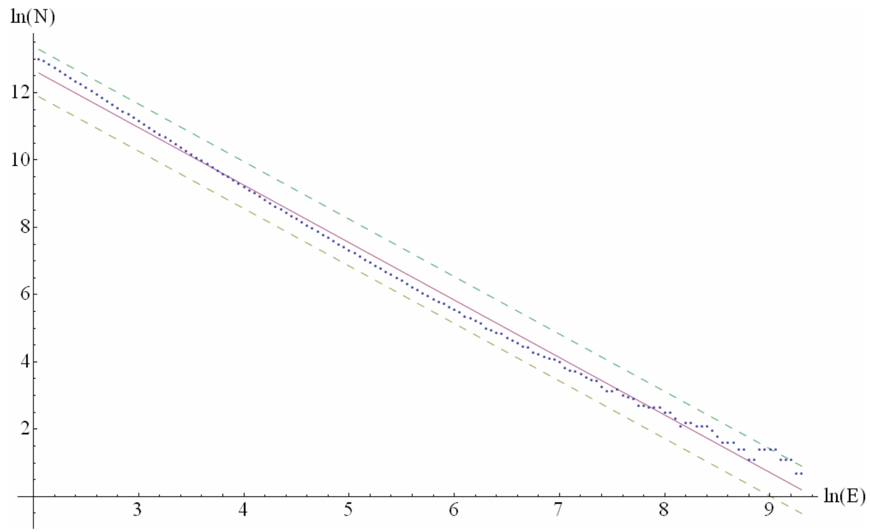
Avignon : variation de l'information
Image 3 : ε = 24,8 m ; Ln(E) de 4 à 10



À l'échelle

$D = 1{,}642 \pm 0{,}011$

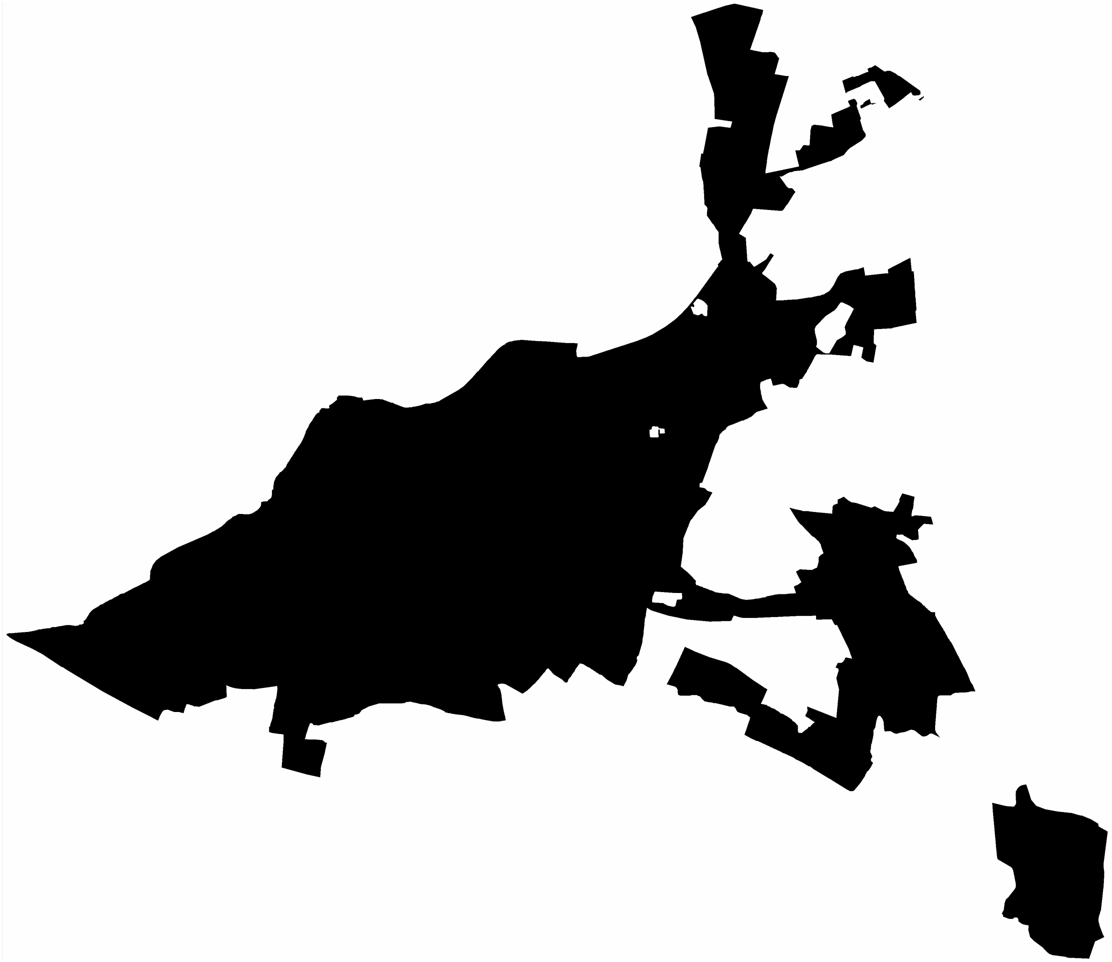
Avignon : variation de l'information
Image 4 : $\varepsilon = 7{,}9$ m ; Ln(E) de 2 à 10

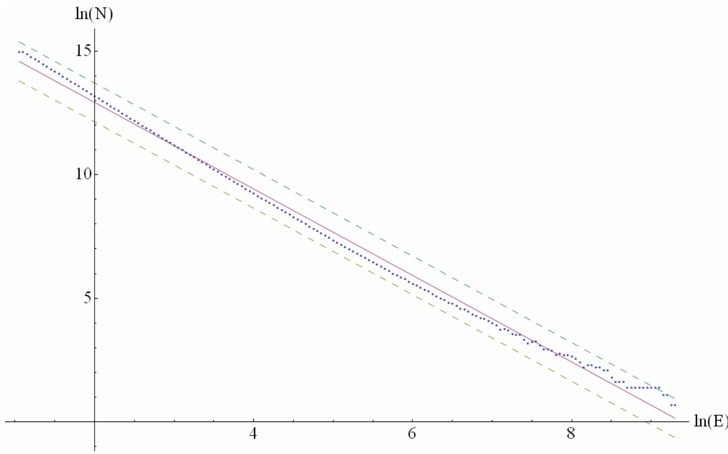


Divisée par 4

$D = 1{,}709 \pm 0{,}010$

Avignon : variation de l'information
Image 5 : $\varepsilon = 3$ m ; Ln(E) de 1 à 10

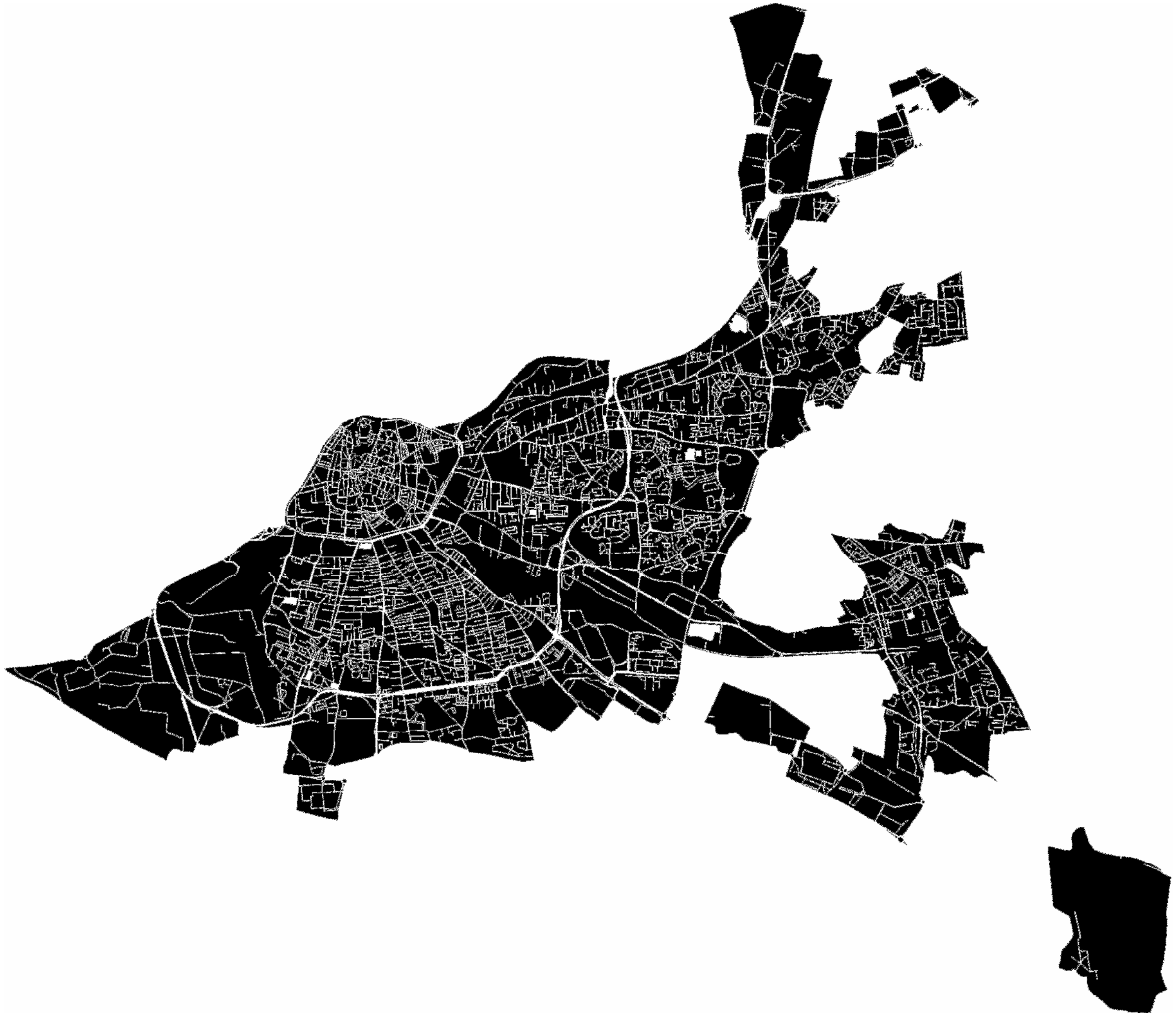


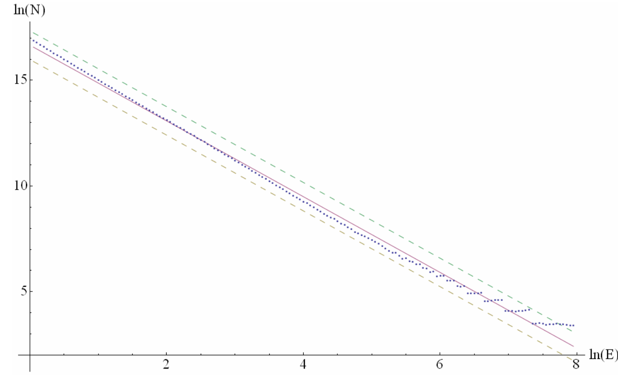


Divisée par 10

$D = 1{,}749 \pm 0{,}010$

Avignon : variation de l'information
Image 6 : ε = 1 m ; Ln(E) de 0 à 10



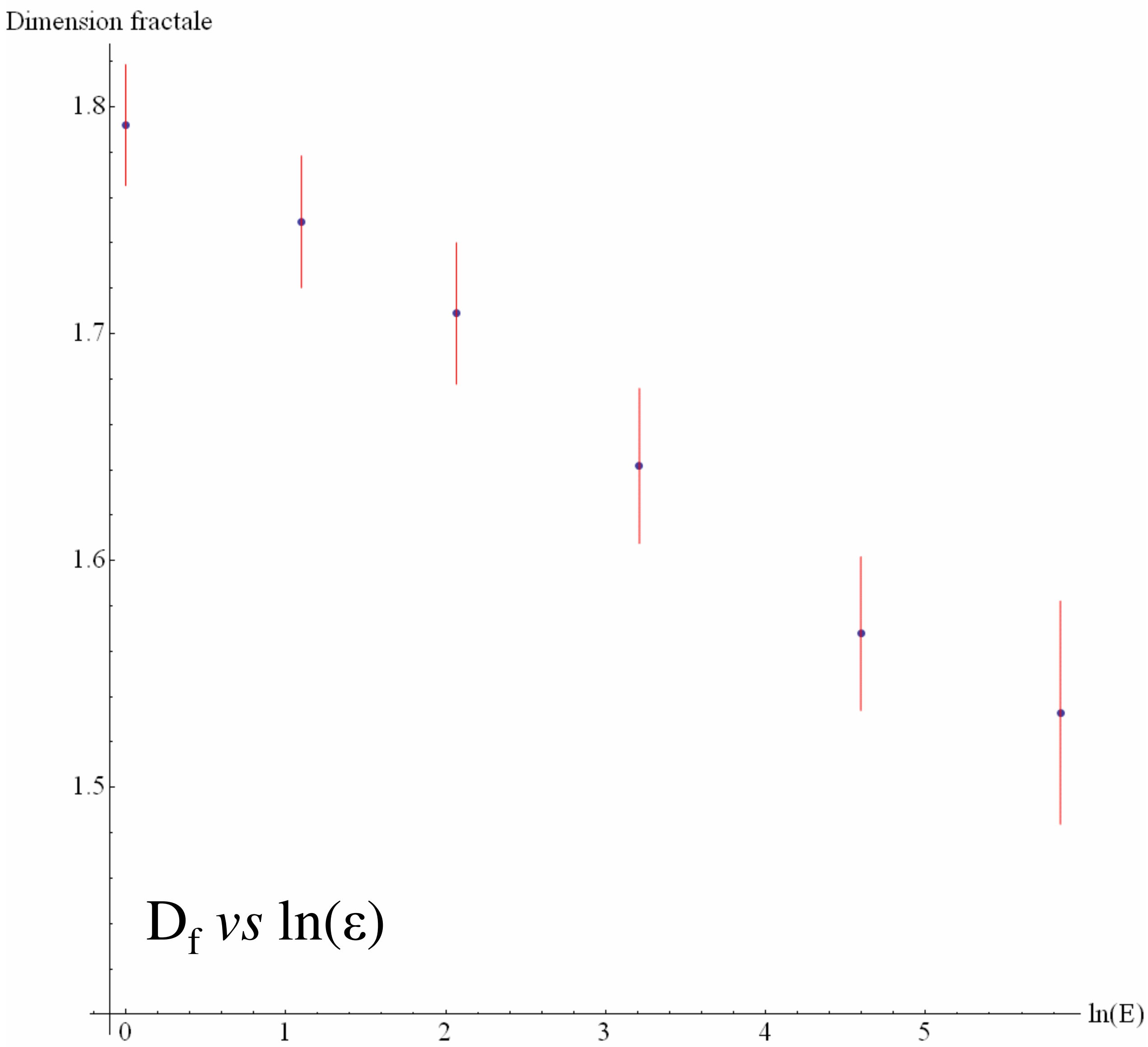


Divisée par 30

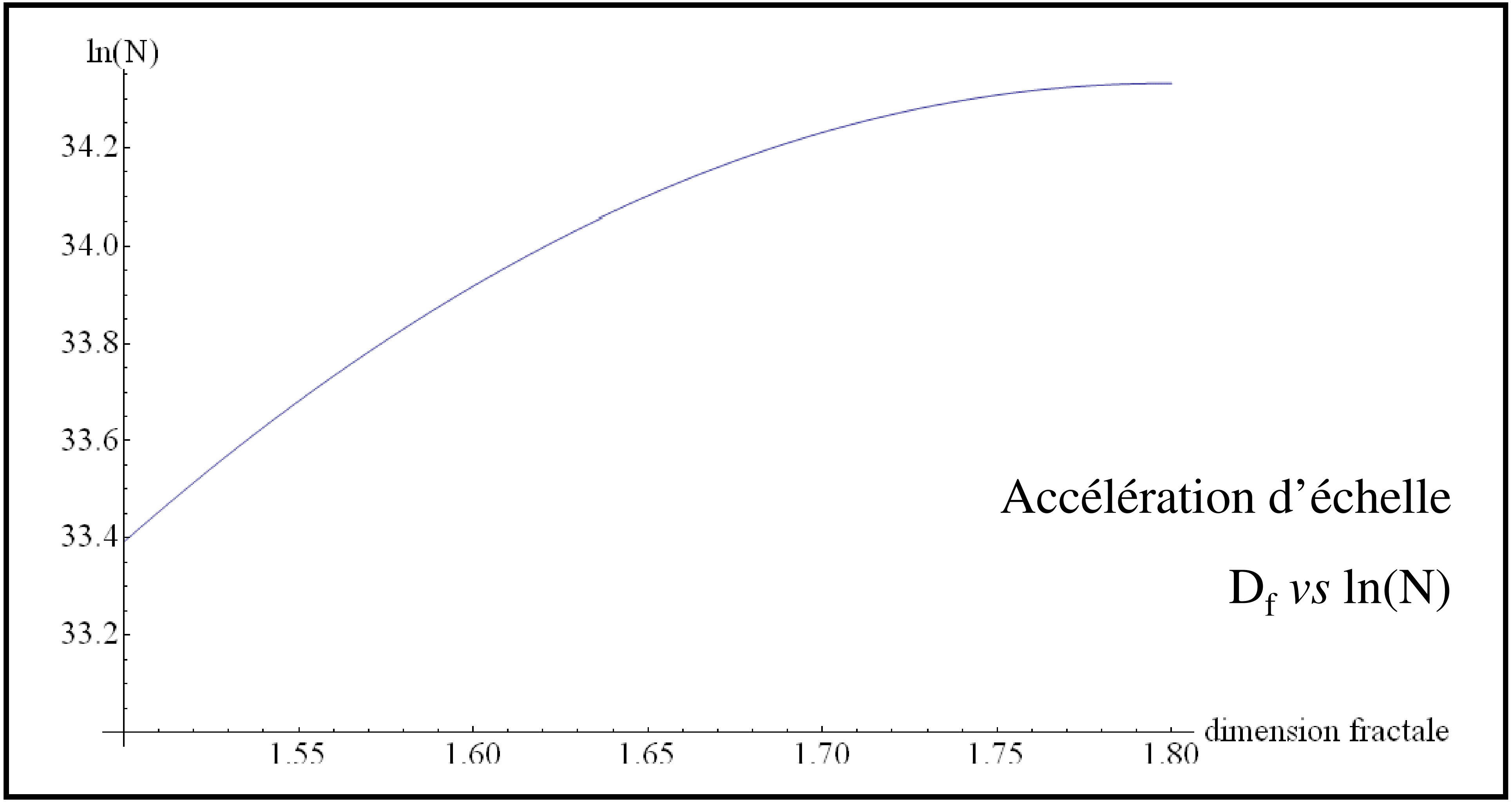
D = 1,792 ± 0,009

Avignon : synthèse

La dimension fractale varie selon les échelles de résolution utilisées.



Avignon
exemple d'accélération d'échelle



Conclusion

- Universalité de la structuration en échelle
- De nombreux et différents cas en géographie
- La RE : une théorie formelle de ce mode d'organisation
- Une application à la géographie qui nécessite une déconstruction de certaines questions (niveaux *vs* continuum scalaire ; relativité ; etc.)