

Le fil d'Ariane du dédale scalaire de l'espace temps géographique

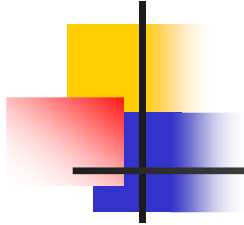
Laurent Nottale ¹

Philippe Martin ²

Maxime Forriez ²

¹ Observatoire de Paris – Meudon LUTH - CNRS

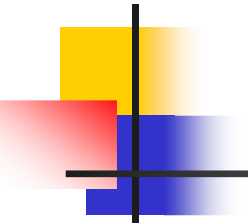
² Université d'Avignon ESPACE - CNRS



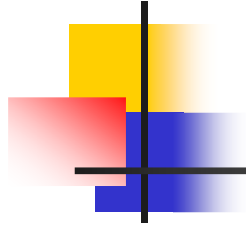
- Il s'agit de concevoir la possibilité d'une compréhension et d'une explication des morphologies et des morphogenèses en n'ayant pas recours à une source productrice hétéronome
- Cela implique de formaliser un processus de différenciation autonome, donc de construire une théorie.

Sur quelles bases ?

Cinq idées fondamentales :

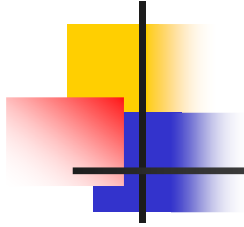
- 
- Ordres de grandeur (taille), cohérence interne et limite
 - Résolution : mesure et qualité
 - Représentation : facteur de réduction de la carte
 - Variation de l'information selon les échelles
 - Modélisation et équation différentielles d'échelles : $\lim \varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$

Spatialité « classique »



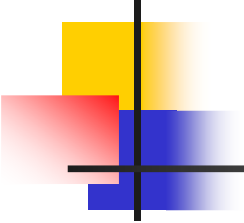
- Y-a-t-il quelque chose là ?
 - Logique de découvreur : invention des lieux
- Où est-ce ?
 - Logique de localisation : localisation des lieux par rapport à un référentiel externe
- Quel rapport entre le niveau des attributs de lieux ?
 - Logique spatiale (analyse spatiale) : écart des lieux rapportés à l'écart des attributs en fonction d'une variation selon X, Y, Z voire t

Spatialité moins « classique »



- Quel rapport entre le niveau des attributs selon les échelles en fonction de la distribution des lieux (porteur ou non d'un attribut) et du niveau de cet attribut ?
 - La logique scalaire correspond à la variation de l'information (niveau d'un attribut distribué) en fonction de la variation de l'échelle (ϵ)

Quelles sont les conditions rationnelles de possibilité d'une théorie en géographie ?



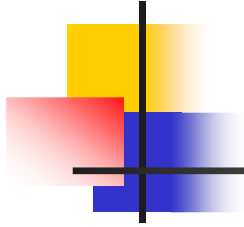
- Trois idées essentielles :

- -1- Observation et observable (phénoménologie)

- -2- Rôle des échelles (scalarité)

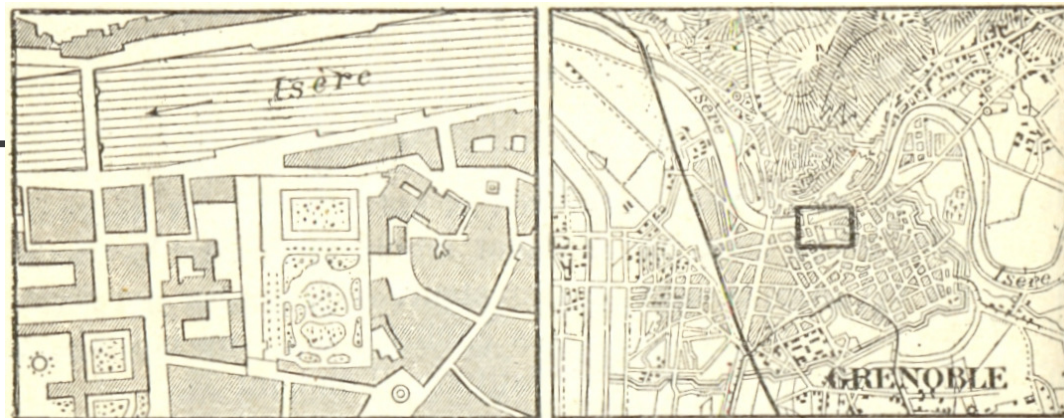
- -3- Co-production par deux termes au moins dialectiquement opposés pour échapper à l'idée de création et d'émergence

L'observation conduit à une constat



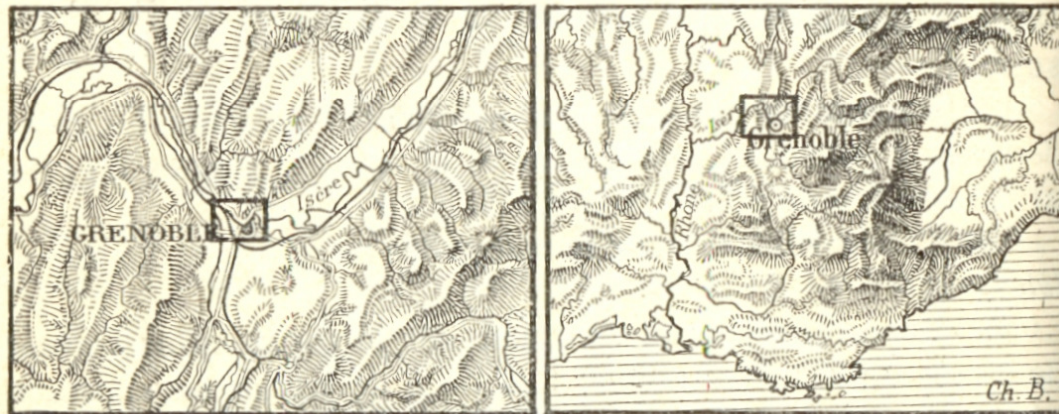
- Une structure géographique varie en fonction de sa résolution
 - Grenoble
 - Beijing

Grenoble : à surface de représentation constante, variation de l'information d'une échelle à l'autre



Échelle de 1:10.000

Échelle de 1:100.000



Échelle de 1:1.000.000

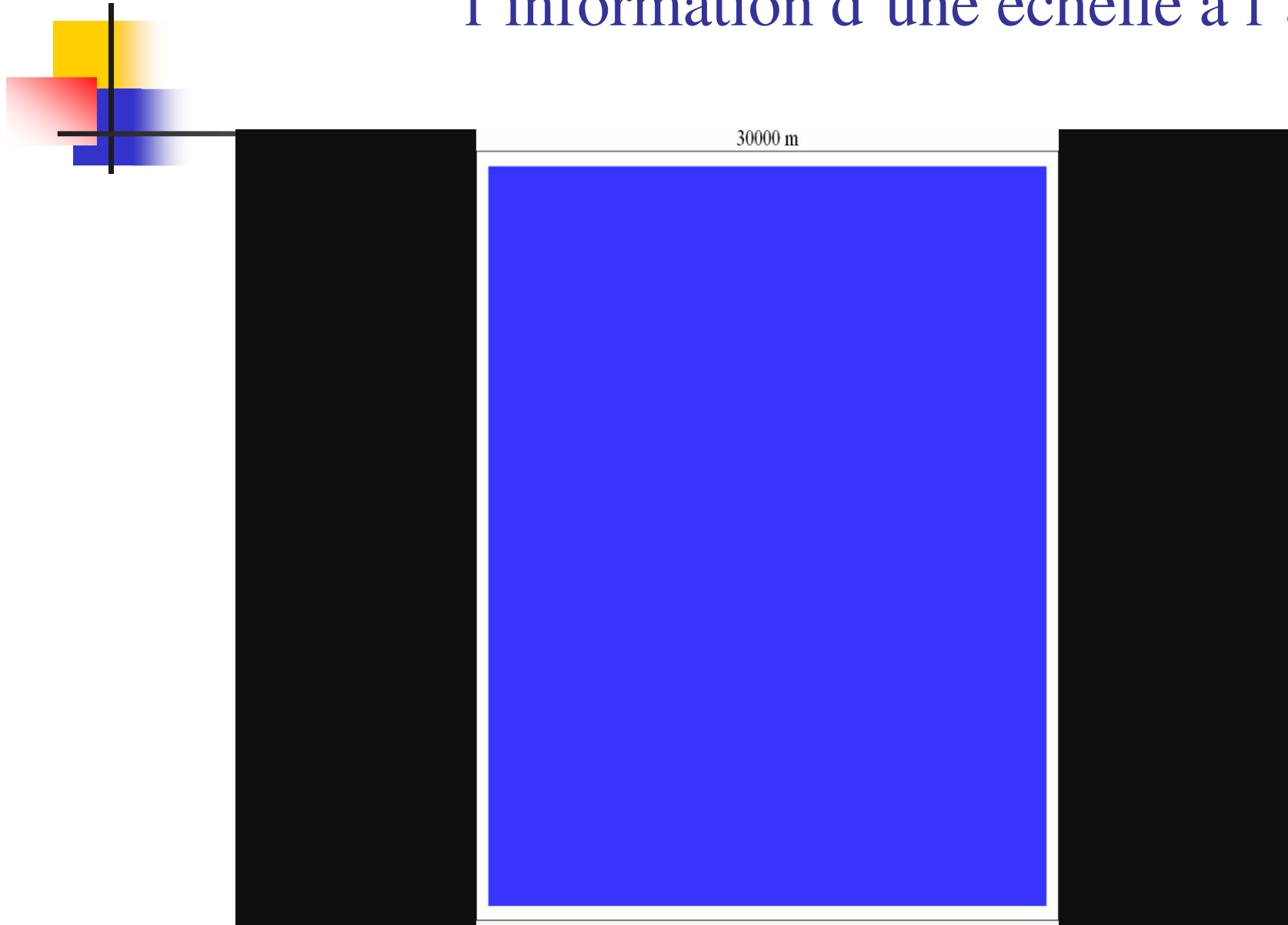
Échelle de 1:10.000.000

CARTE D'UNE MÊME CONTRÉE A DES ÉCHELLES DIFFÉRENTES.

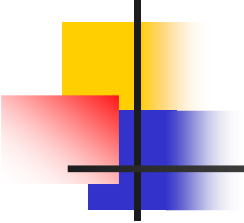
Dans la carte à grande échelle (1 : 10 000), Grenoble occupe tout le champ de carte; dans la carte à petite échelle (1 : 10 000 000), ce n'est plus qu'un point. Au milieu de chacune des trois dernières cartes on a encadré l'espace occupé par le champ de la carte immédiatement précédente.

Extrait d'un
manuel
scolaire de
classe de
seconde
datant de
1926

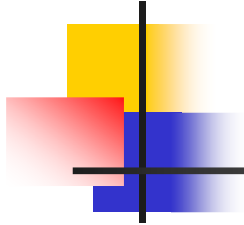
Beijing : à surface territoriale constante variation de l'information d'une échelle à l'autre



Un vieux problème aux noms multiples

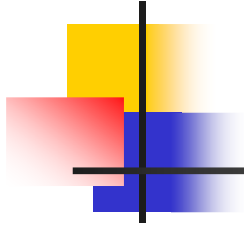
- 
-
- Effet d'échelle
 - Effet de maillage
 - Modifiable Area Unit Problem (MAUP)
 - Système d'échelle
 - *Etc.*

*Peu importe l'expression, tout géographe
quantitativiste a été confronté à ce
problème*



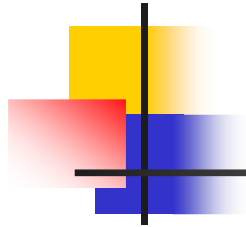
■ Ordre de grandeur

- La géographie existe parce que l'espace géographique n'est pas homogène
- L'espace géographique n'est donc pas organisé selon une structure spatiale obéissant à une règle strictement homothétique
- Par conséquent, l'information ne peut que varier d'un ordre de grandeur à l'autre

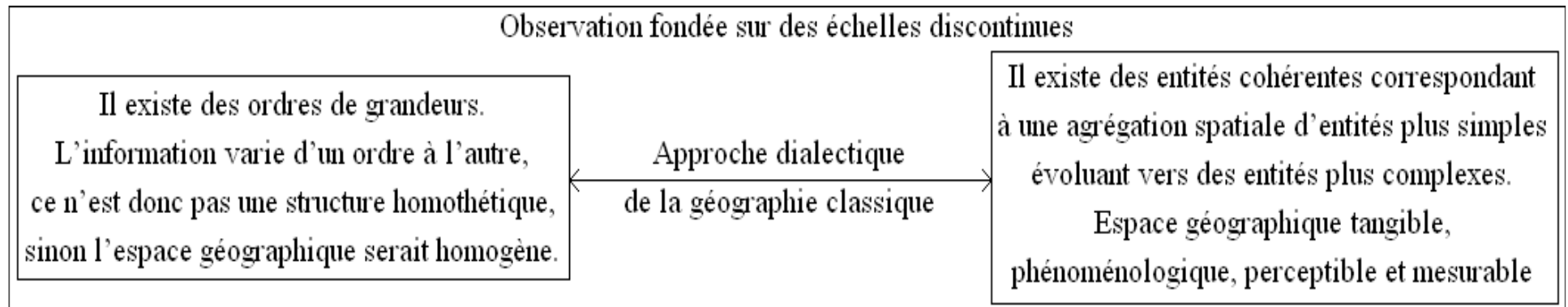


- Entités cohérentes
 - À chaque ordre de grandeur peut correspondre une entité cohérente
 - L'agrégation de ces entités permet de changer d'ordre de grandeur et de niveau d'organisation
 - Ces entités sont perceptibles (discours) et mesurables (approche quantitative)

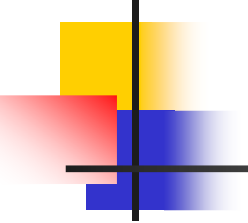
L'observable -3-



- L'observation se fait selon des échelles discontinues (niveaux)
- L'articulation de l'observation d'entités cohérentes et des ordres de grandeurs constitue la dialectique classique de la géographie
- Le document – instrument pivot étant la carte



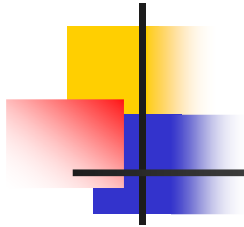
Échelles, premières définitions

- 
- Échelle de référence
 - Unité de mesure
 - Échelle de résolution
 - Précision de l'appareil de mesure et/ou résolution de travail
 - Étendue
 - Surface, zone d'étude
 - Lois d'échelle
 - Lois qui régissent la transformation entre échelles
 - Fractalité
 - Système explicitement structuré en échelles

Quand on zoome sur un fragment d'espace (L, l, h) l'information change-t-elle ?

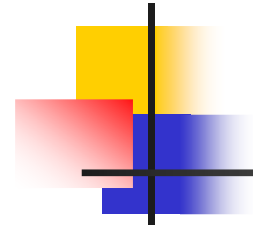
- Si non: c'est un cas d'indépendance d'échelle (cas homothétique)
 - Seule l'AS classique est requise
- Si oui : c'est un cas de dépendance d'échelle (cas fractal)
 - L'AS classique n'est plus suffisante

Mesure et échelles de coupure extrinsèques



- La mesure consiste à quantifier la variation de l'information moyenne en fonction d'une variation continue des échelles matérialisées par une grille à mailles carrées (méthode dit de comptage des boîtes)
- Deux échelles de coupure extrinsèques apparaissent alors :
 - La résolution de l'information (pas d'un MNT, taille du pixel)
 - La taille maximale de la surface (L , l , h) prise en compte (étendue finie)

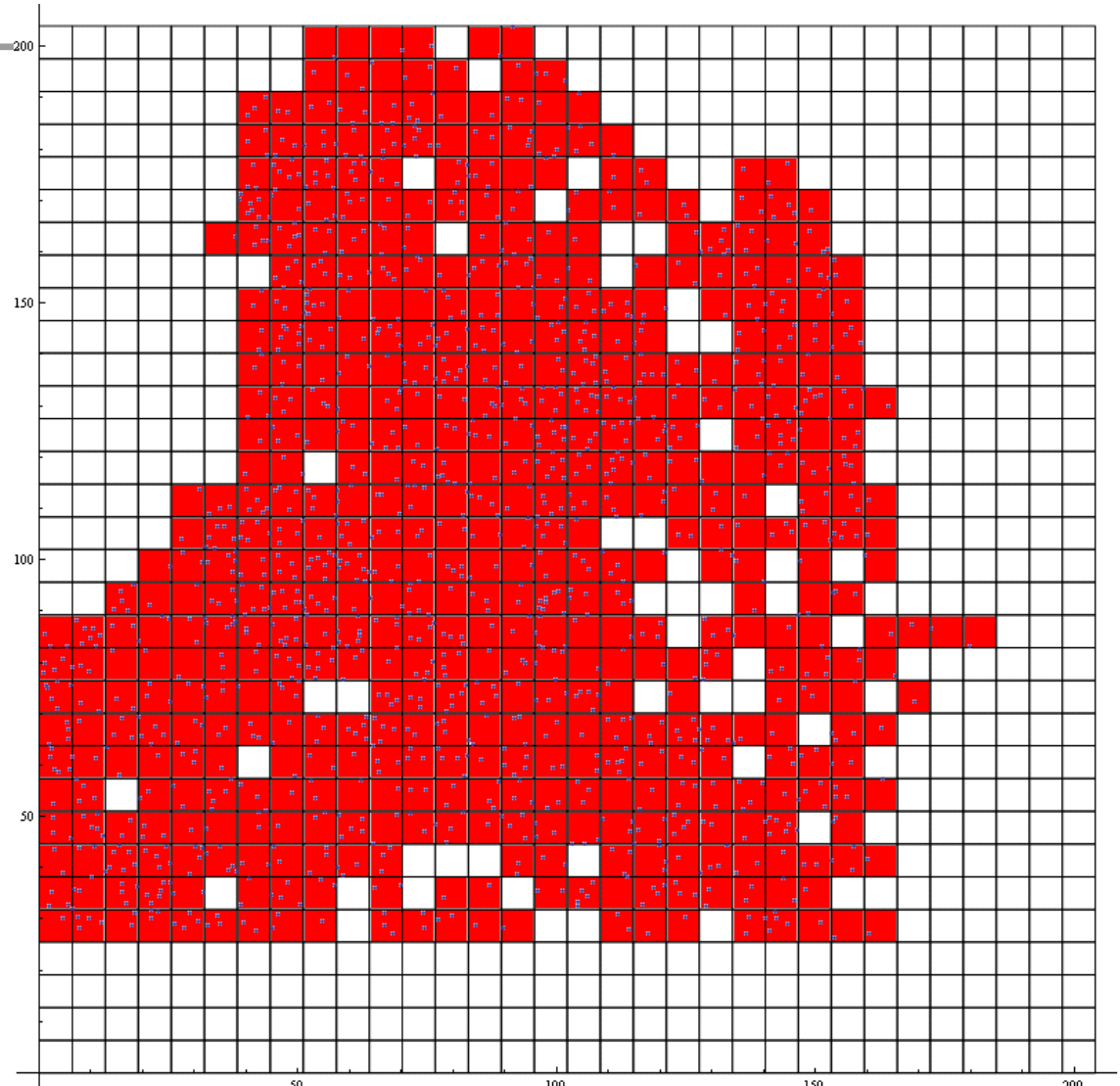
Structures scalaires

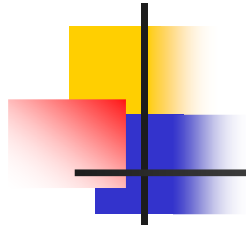


- Indépendance : l'information est constante quelle que soit l'échelle : le MAUP à une solution
- Dépendance : l'information varie suivant l'échelle : le MAUP n'a pas de solution. Toute la question se résume :
 - à un taux (tx_1) de changement de l'information entre les échelles ε_1 et ε_2 (dimension fractale locale)
 - a un taux (Tx_1) de changement des taux (tx_1) et (tx_2) entre les échelle ε_1 et ε_2
 - Si $(tx_1) = (tx_2)$ c'est une situation d'invariance d'échelle
 - Si $(tx_1) \neq (tx_2)$ c'est une situation de dimension fractale variable

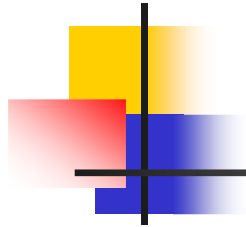
Dimension fractale

- La plus facile à estimer est la mesure par comptage de boîtes (carrées, hexagonales, circulaires, *etc.*)



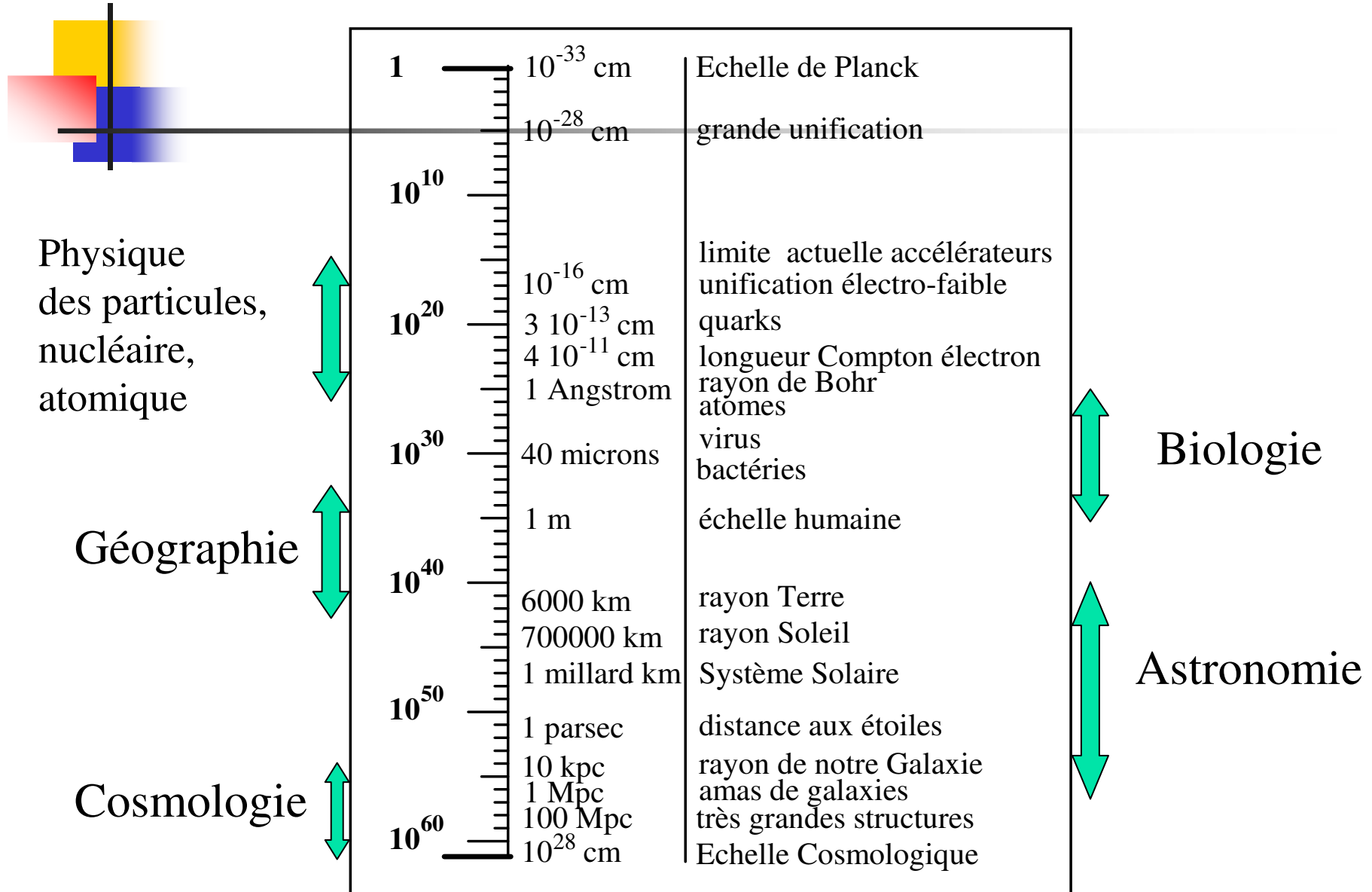


- L'échelle est une catégorie
- Dans cette catégorie on peut définir différentes échelles
 - Echelle de mesure, de résolution, etc.
- Deux problèmes pratiques apparaissent alors :
 - La dimension fractale semble varier en fonction de la résolution de référence
 - Il est rare d'observer une dimension fractale unique

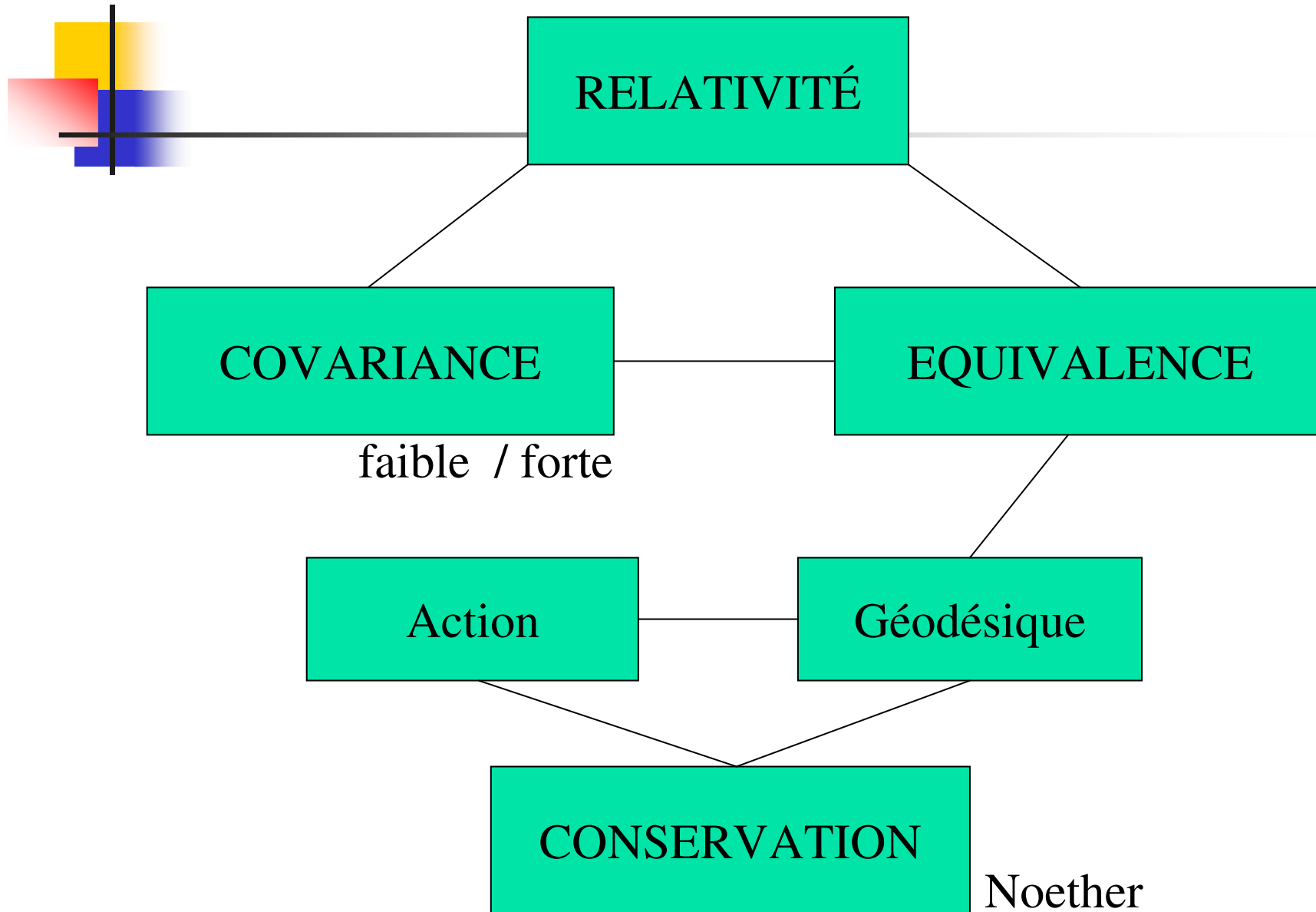


Introduction d'un espace de contrôle formel : la relativité d'échelle

Les échelles dans la nature



Principes premiers



Relativité d'échelle

Continuité

† Abandon de l'hypothèse de différentiabilité de l'espace-temps

Généraliser la relativité du mouvement ?

Transformations de coordonnées non-différentiables

Théorème

Dépendance explicite des coordonnées en fonction des variables d'échelle + divergence

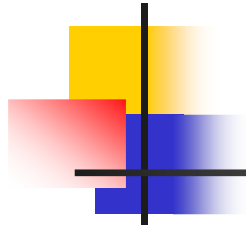
$$X \rightarrow X(\varepsilon)$$
$$f(X) \rightarrow f[X(\varepsilon), \varepsilon]$$

ESPACE-TEMPS FRACTAL

Compléter les lois de la physique par des lois d'échelle

$$\begin{array}{cc} \partial/\partial X & \partial^2/\partial X^2 \\ \partial/\partial \ln \varepsilon & \partial^2/(\partial \ln \varepsilon)^2 \\ & \partial^2/\partial X \partial \ln \varepsilon \end{array}$$

Principe de relativité des échelles



*Redéfinition des intervalles de résolution spatio-temporelle comme caractérisant **l'état d'échelle** du système de coordonnées

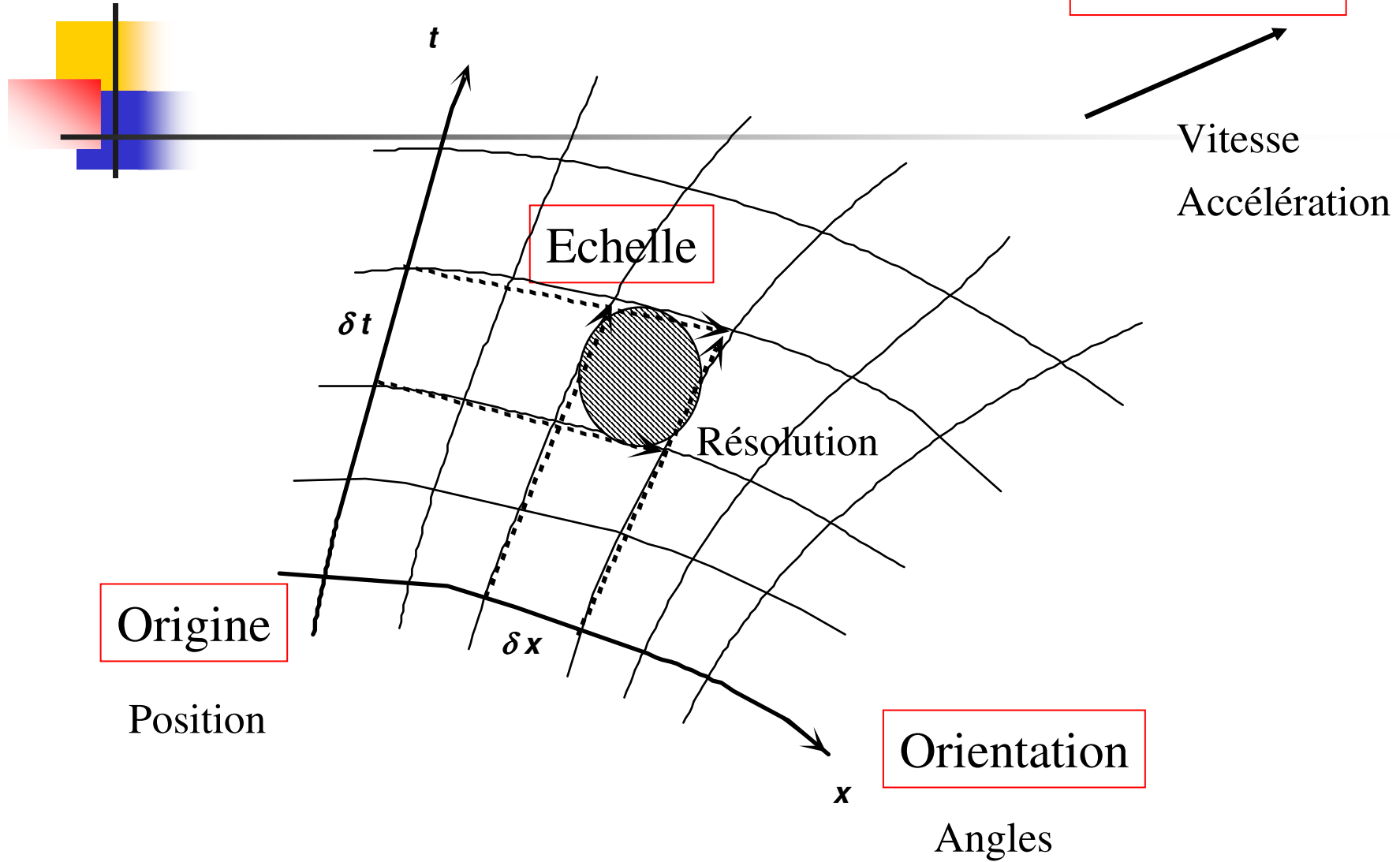
*Caractère relatif des résolutions: seuls des rapports d'échelle ont un sens physique, jamais une échelle absolue

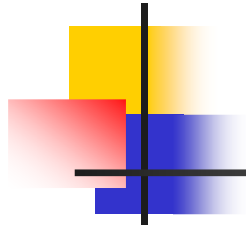
***Principe de relativité d'échelle:** « les lois de la nature s'appliquent dans tout système de coordonnées, quel que soit son état d'échelle »

***Principe de covariance d'échelle:** les équations de la physique gardent leur forme (la plus simple possible)¹ dans les transformations d'échelle du système de coordonnées

¹Faible: même forme dans des transformations généralisées
Forte: forme galiléenne (vide, mouvement inertiel)

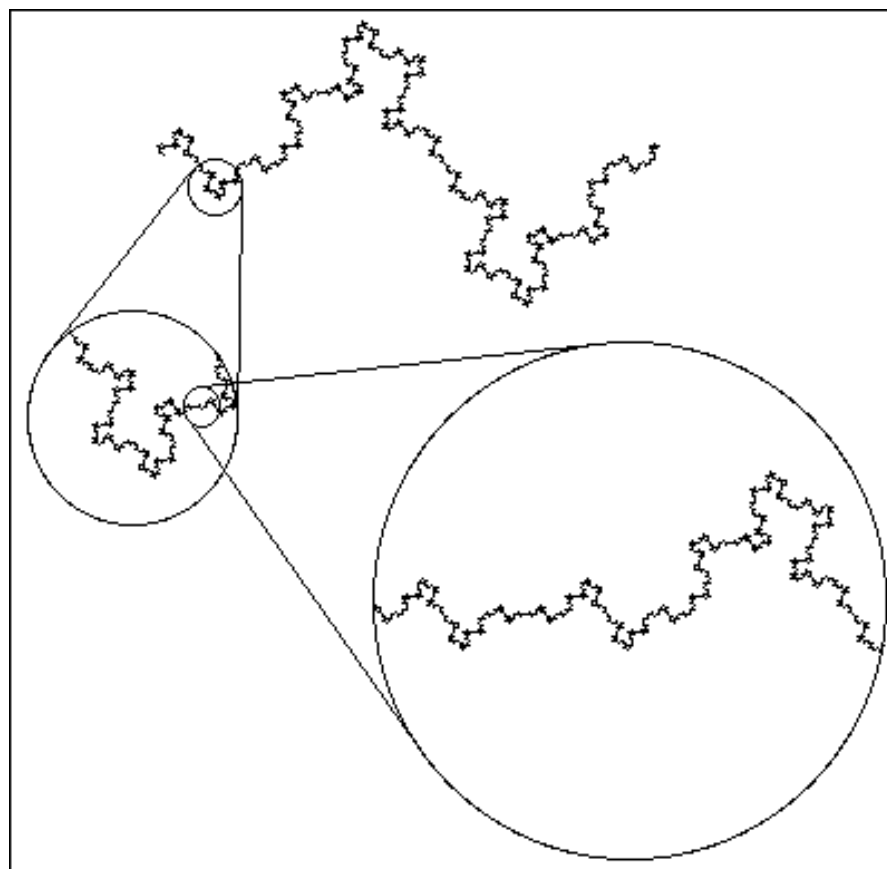
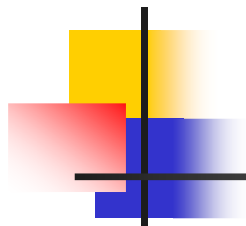
États d'un système de coordonnées :



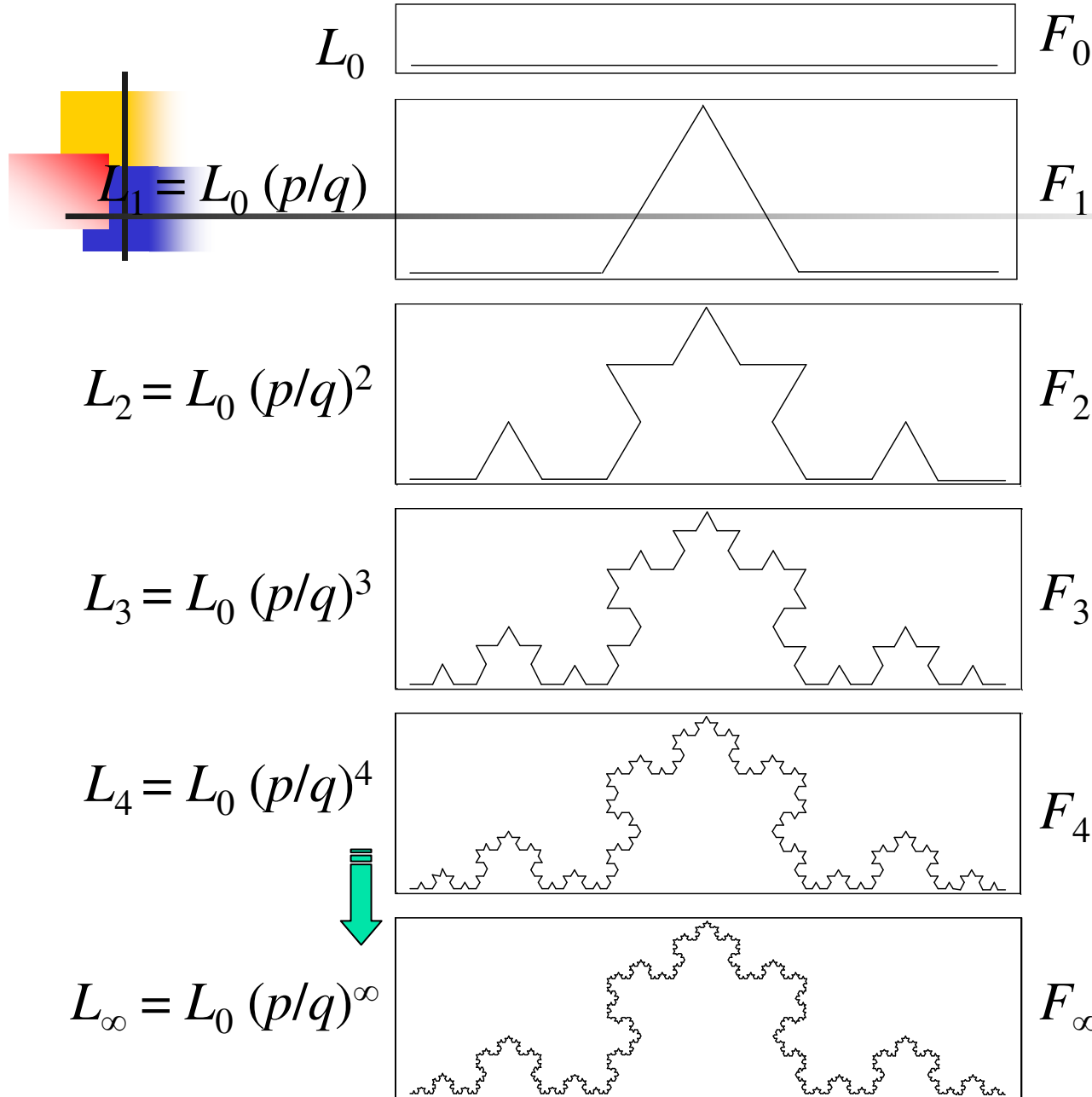


Fractals : quelques rappels

Zooms discrets sur une courbe fractale



Courbe de Von Koch



Générateur:

$$p = 4$$

$$q = 3$$

Dimension fractale:

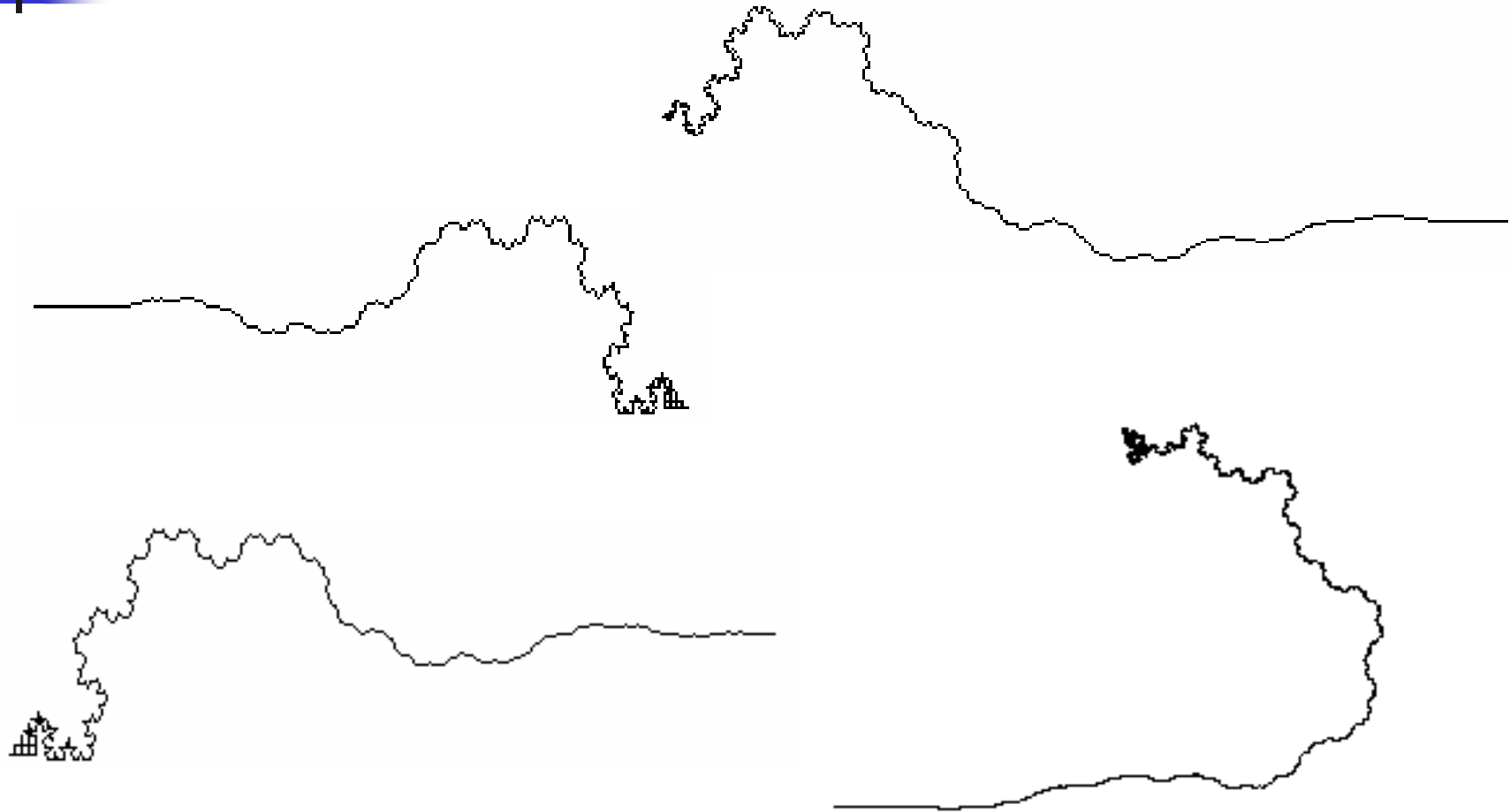
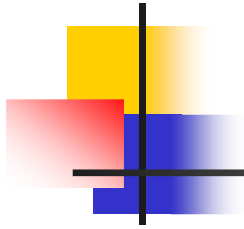
$$D_F = \frac{\log p}{\log q}$$

$$\varepsilon = \lambda \times q^{-n}$$

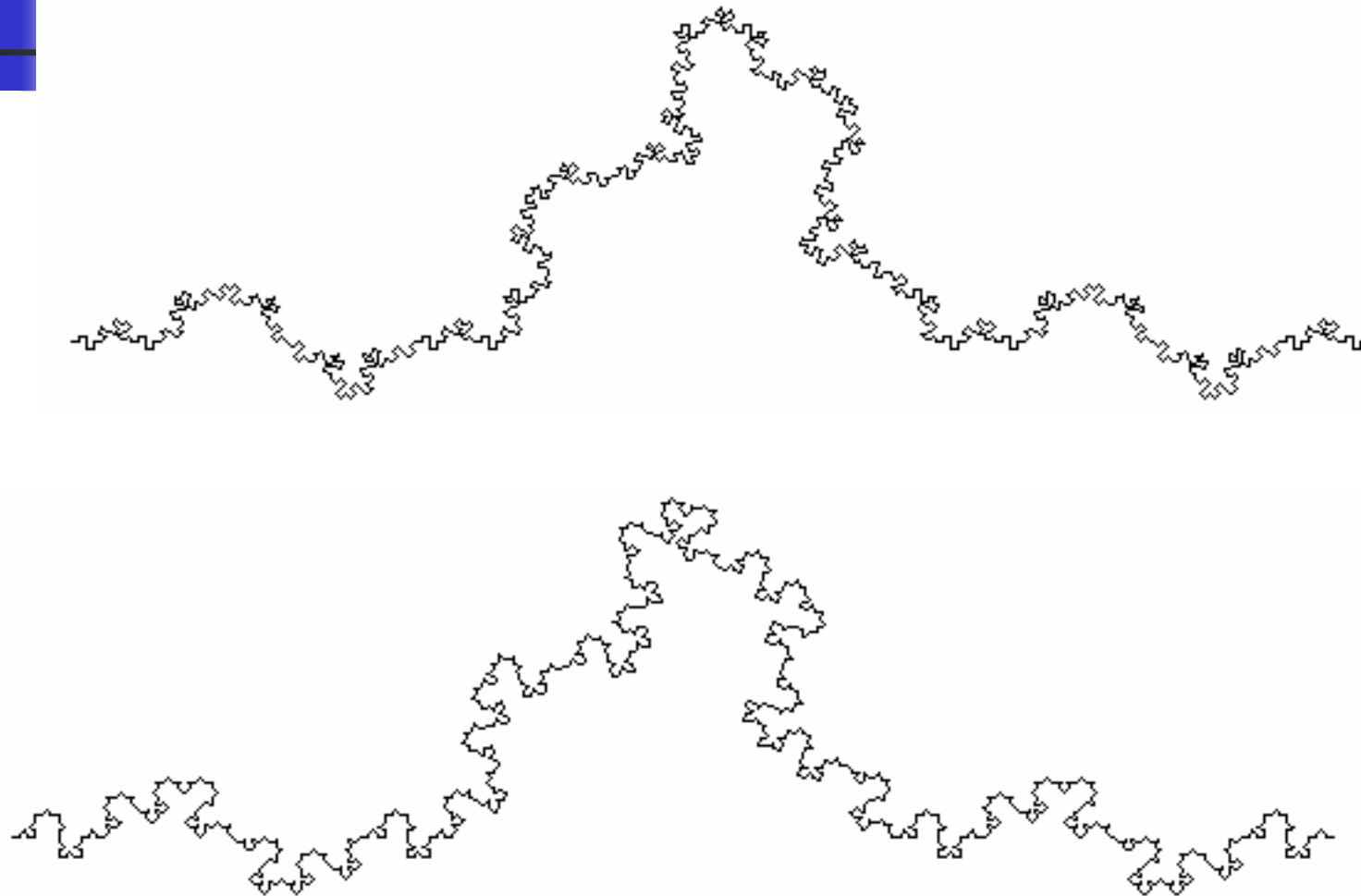


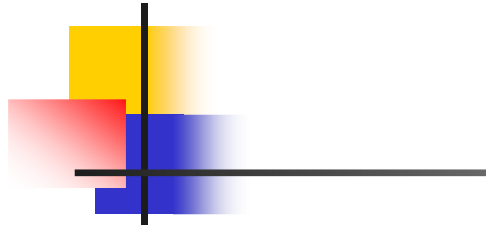
$$L_n = L_0 \left(\frac{\lambda}{\varepsilon} \right)^{D_F - 1}$$

Courbes de dimension fractale variable (dans l'espace)

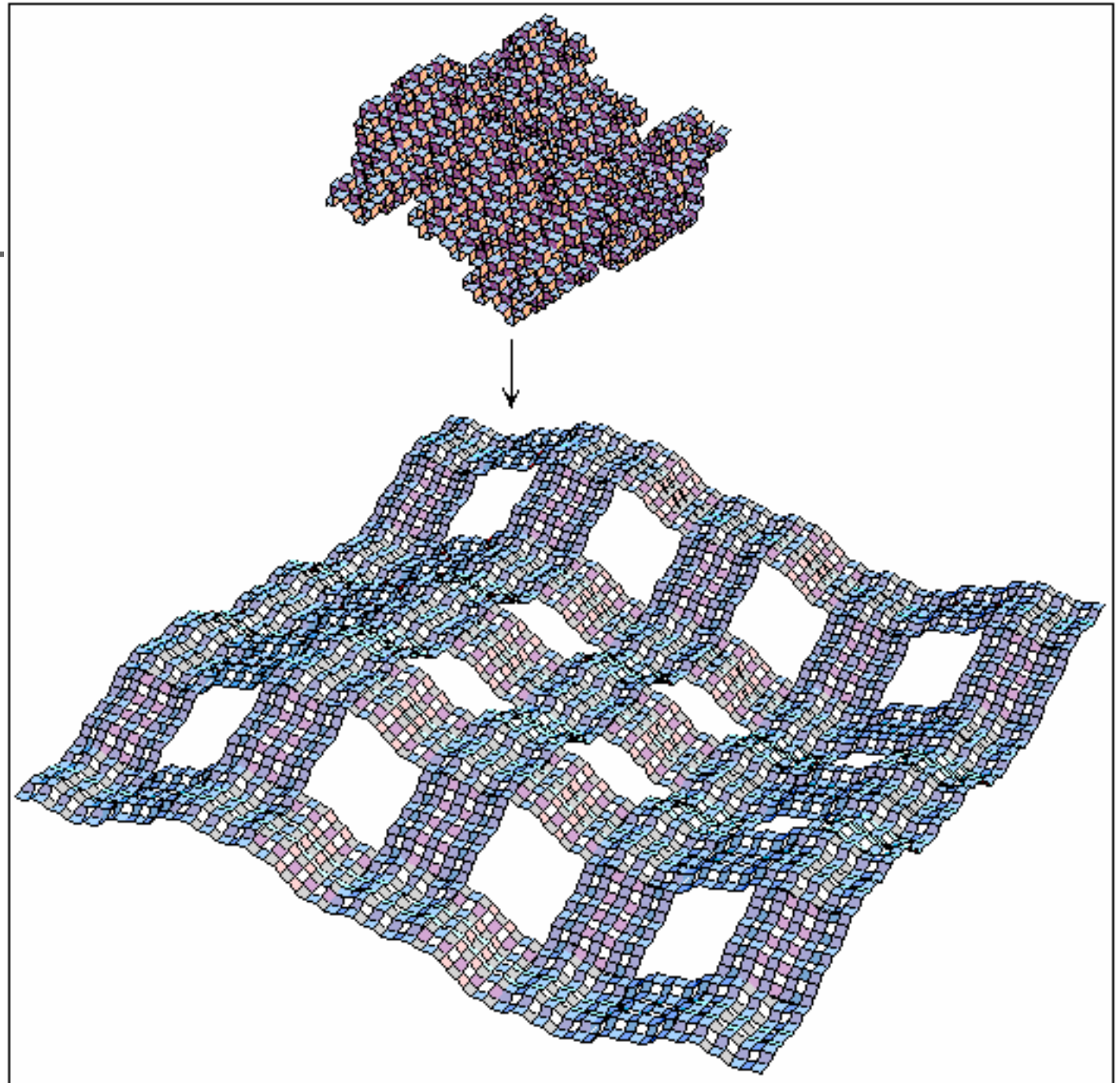


Courbes de dimension variable (en échelle): générateur dépendant du niveau, p et q variables

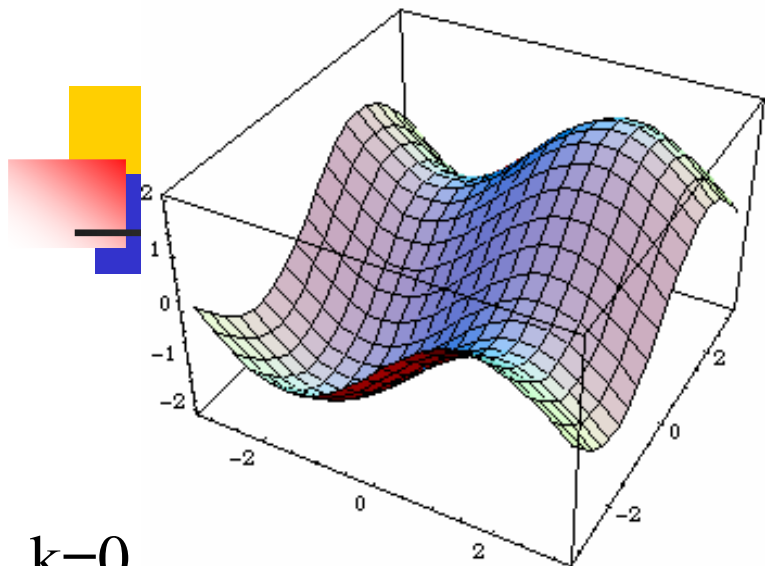




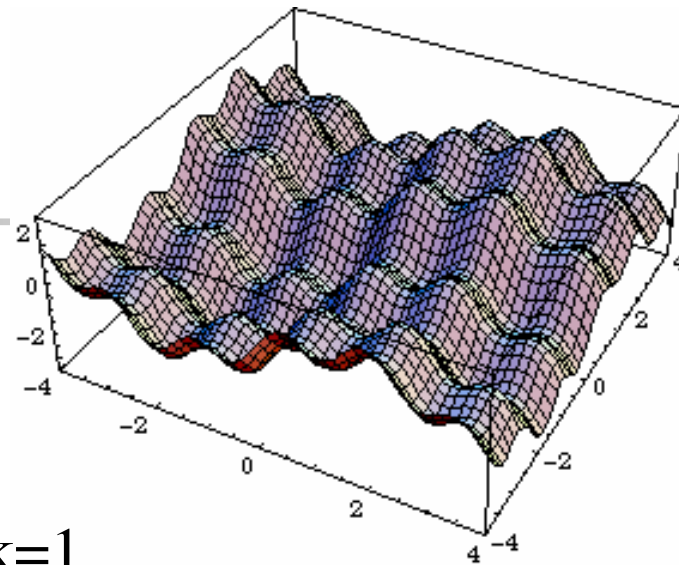
Surface
fractale :
construction



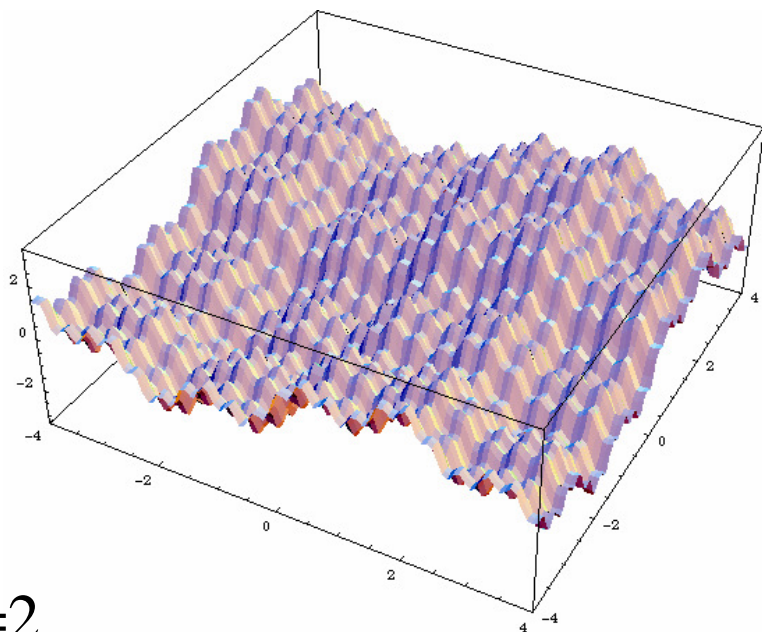
Surface fractale: dépendance d'échelle



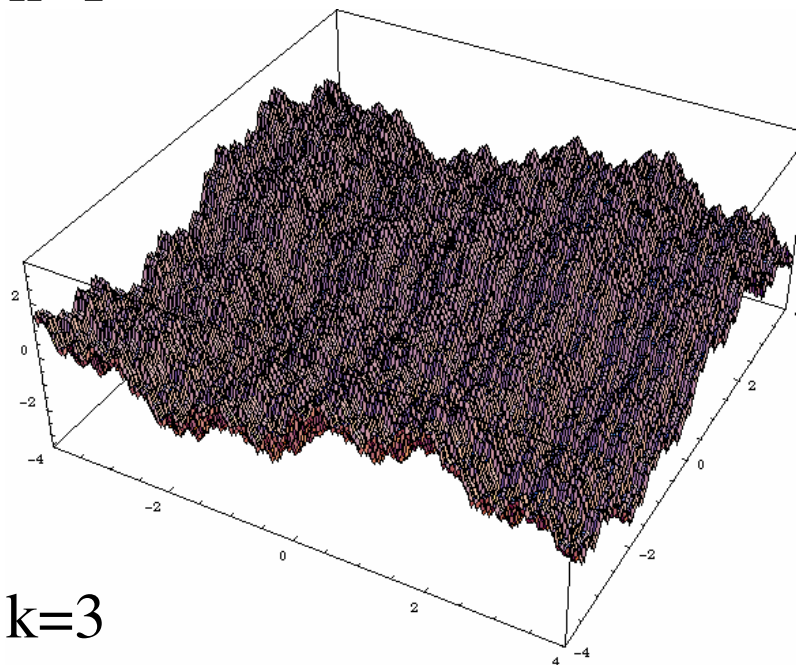
$k=0$



$k=1$

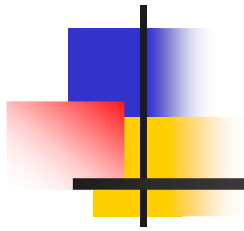


$k=2$



$k=3$

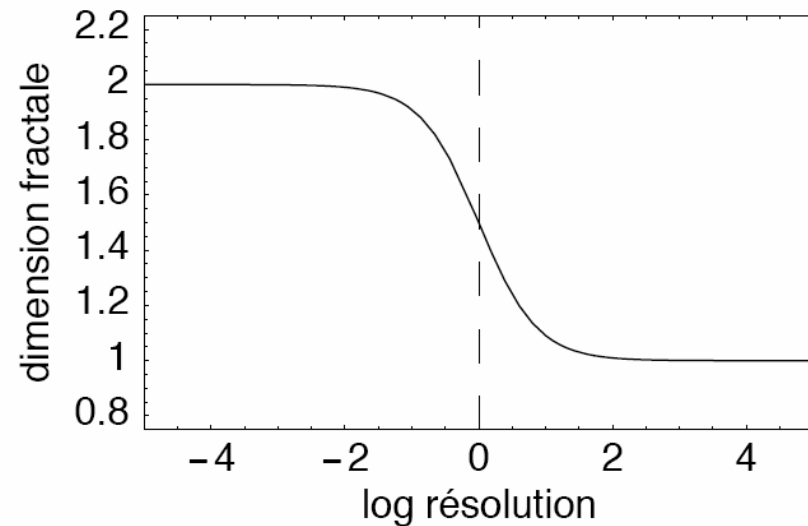
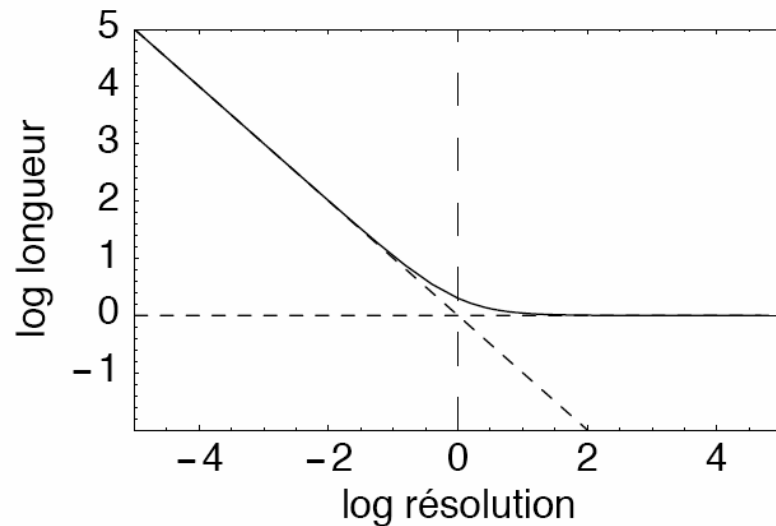
Lois de transformation d'échelle



Equations différentielles d'échelle et leurs solutions

<http://www.luth.obspm.fr/~luthier/nottale/>

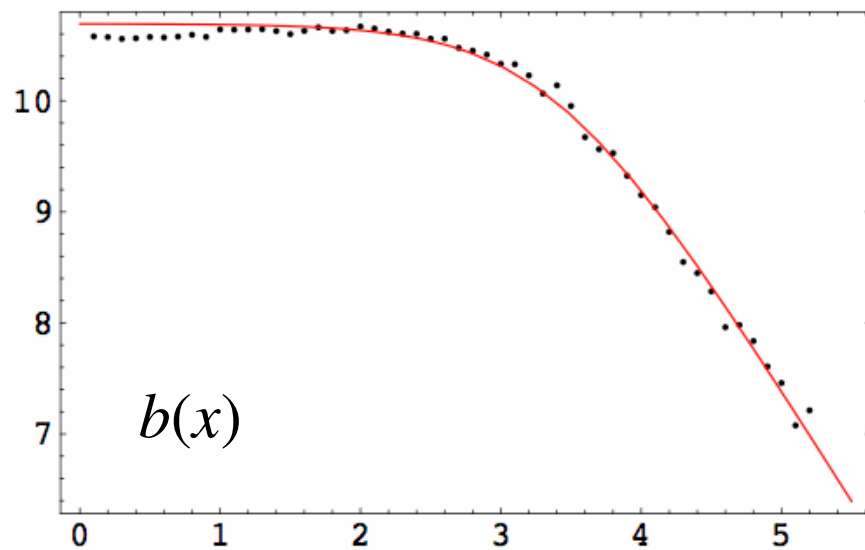
Loi d'échelle auto-similaire (dimension fractale constante) + transition Fractal / Non-Fractal



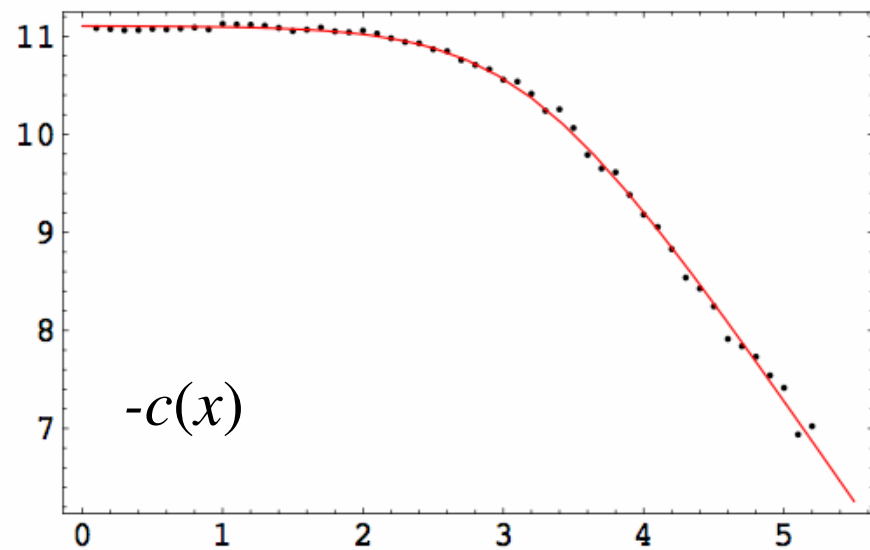
Solution de l'équation différentielle d'échelle:

$$dL / d \ln r = a + b L$$

Transition Fractal / Non-Fractal : exemple (Courbe de Niveau 450m Gardon)



$$x = \ln r$$

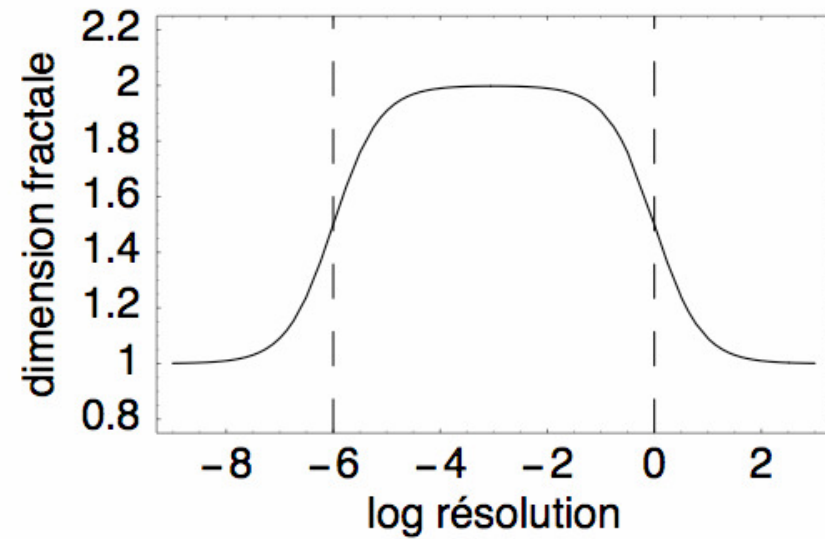
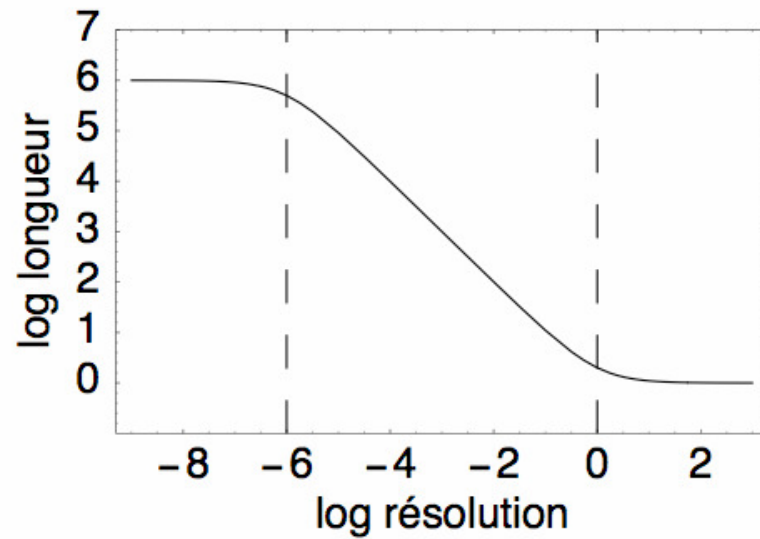
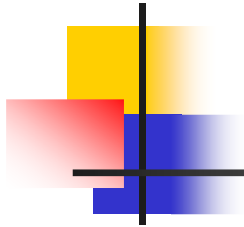


$$x = \ln r$$

FIGURE 12 – Ajustement par moindres carrés d'une loi de transition fractal-nonfractal sur les deux coefficients $b(x)$ (gauche) et $-c(x)$ (droite) de la loi $\ln N = a(x) + b(x)h + c(x)h^2$.

N = nombre de boîtes de taille r (comptage de boîtes)

Deux transitions



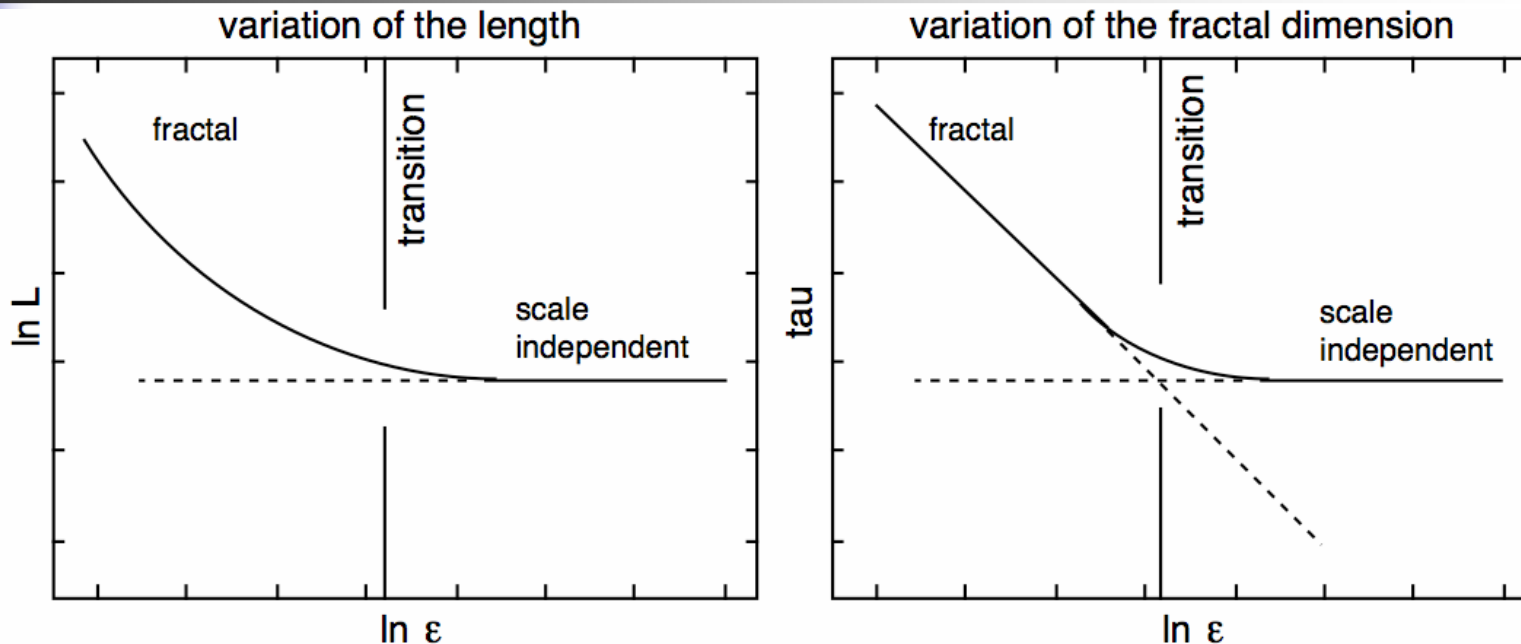
Solution de l'équation différentielle d'échelle:

$$dL / d \ln r = a + b L + c L^2$$

« Dynamique d'échelle » : force d'échelle constante

$$\ln \left(\frac{\mathcal{L}}{\mathcal{L}_0} \right) = \frac{1}{2G} \ln^2 \left(\frac{\lambda}{\varepsilon} \right)$$

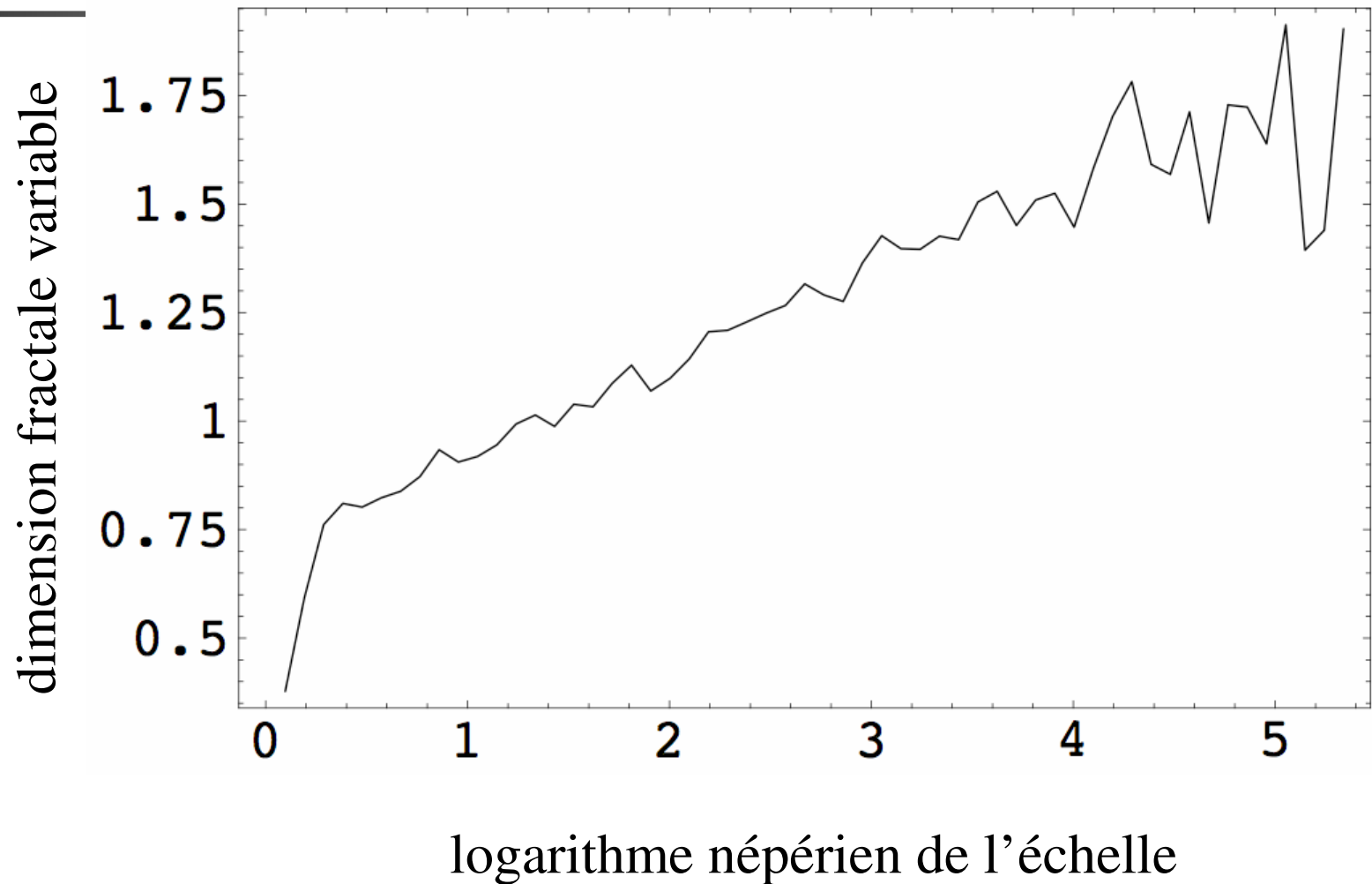
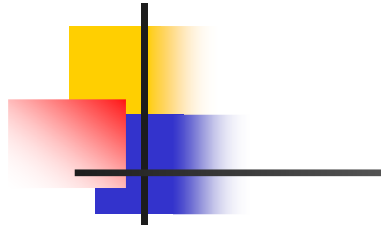
$$\delta = \frac{1}{G} \ln \left(\frac{\lambda}{\varepsilon} \right) \quad (\text{asymptotique})$$



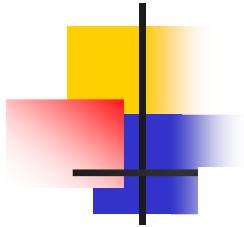
Dépendance d'échelle de la longueur et de la dimension d'échelle effective dans le cas d'une 'force d'échelle' constante:

$$\frac{d^2 \ln \mathcal{L}}{d\delta^2} = G$$

Exemple : Courbe de Niveau 450m Gardon

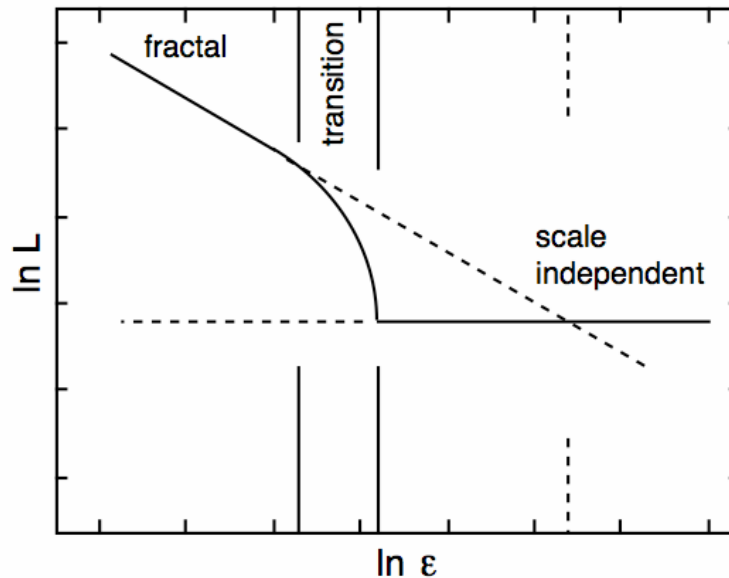


Dynamique d'échelle: oscillateur harmonique

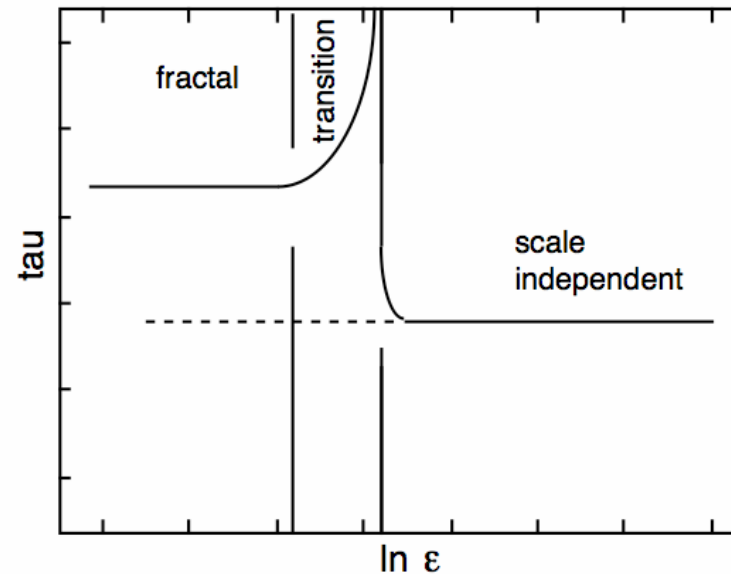


$$\ln \frac{\mathcal{L}}{\mathcal{L}_0} = \delta \sqrt{\ln^2 \left(\frac{\lambda}{\varepsilon} \right) - \frac{1}{\delta^2}}$$

variation of the length



variation of the fractal dimension



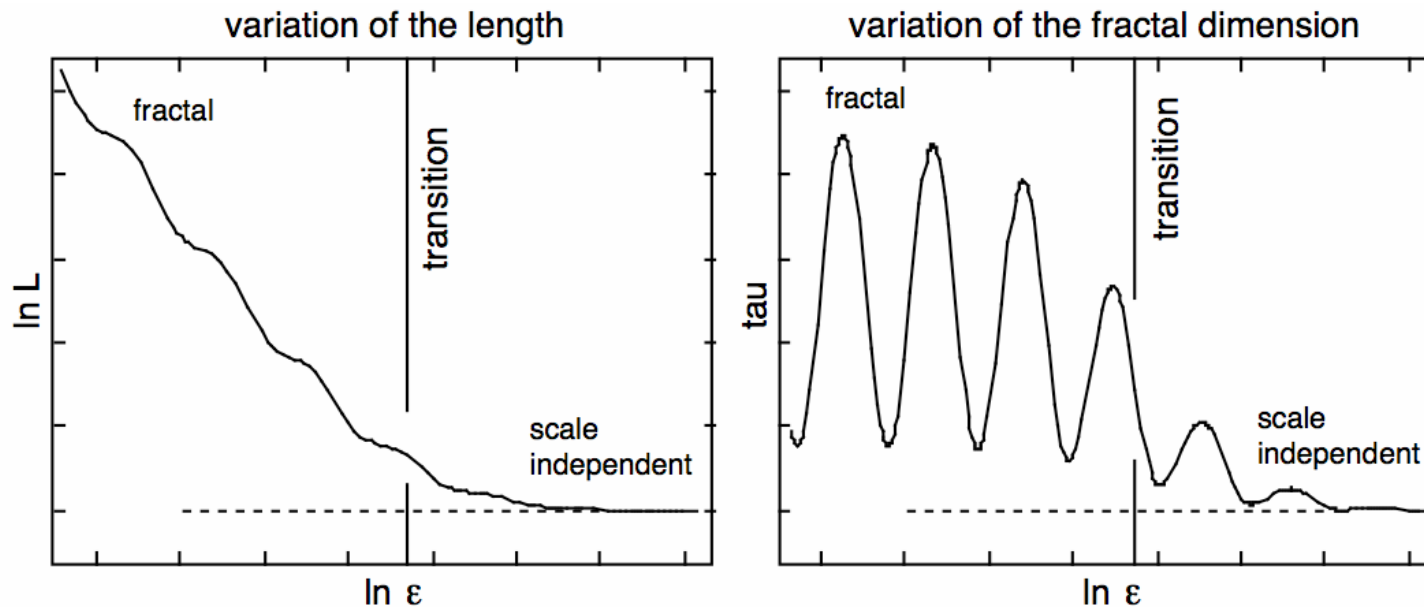
Dépendance d'échelle de la longueur et de la dimension d'échelle effective dans le cas d'un potentiel d'oscillateur harmonique (dans l'espace des échelles)

$$\frac{d^2 \ln \mathcal{L}}{d\delta^2} = \frac{1}{\delta_0^2} \ln \mathcal{L}$$

Loi log-périodique

$$\mathcal{L}(\varepsilon) = \mathcal{L}_0 \left[1 + (\lambda/\varepsilon)^\nu e^{b \cos(\omega \ln(\varepsilon/\lambda))} \right]$$

(Petites
fluctuations)

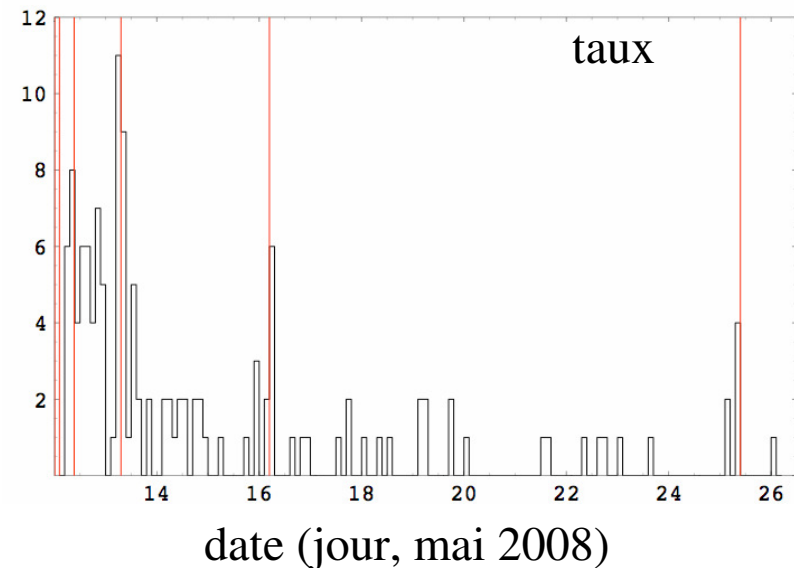
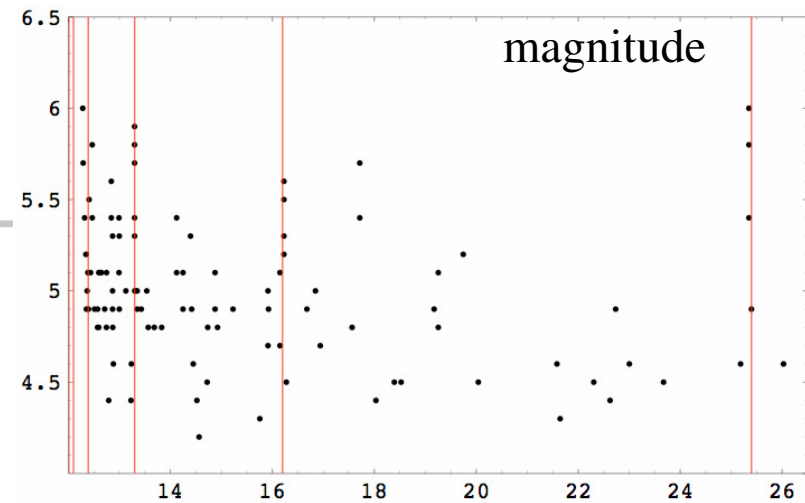
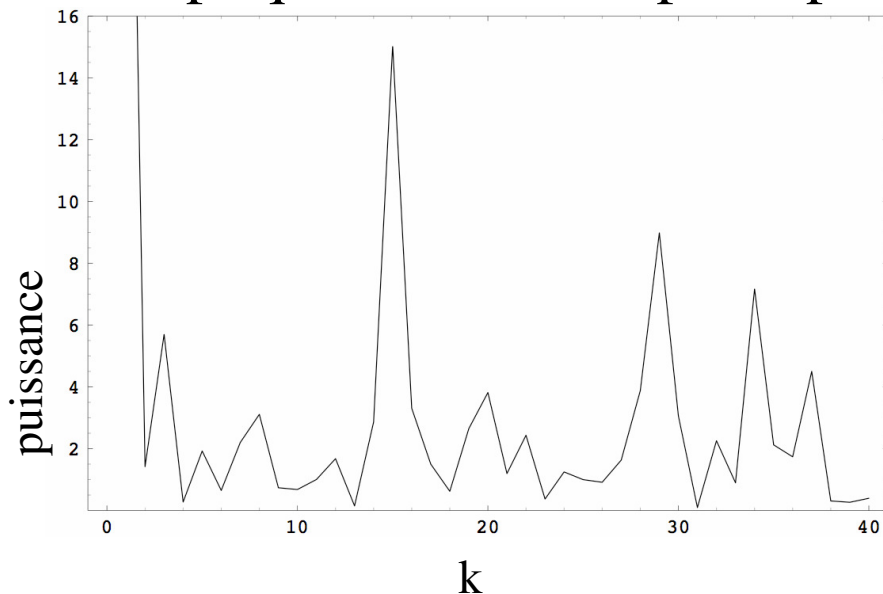


Dépendance d'échelle de la longueur et de la dimension d'échelle effective dans le cas d'un comportement log-périodique (invariance d'échelle discrète, exposant complexe) avec transition fractal / non fractal.

Exemple : Tremblements de Terre

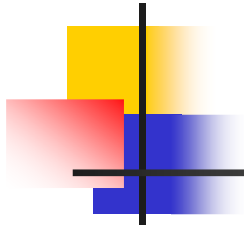
Sichuan 2008.

Analyse par spectre de puissance des répliques du séisme principal.



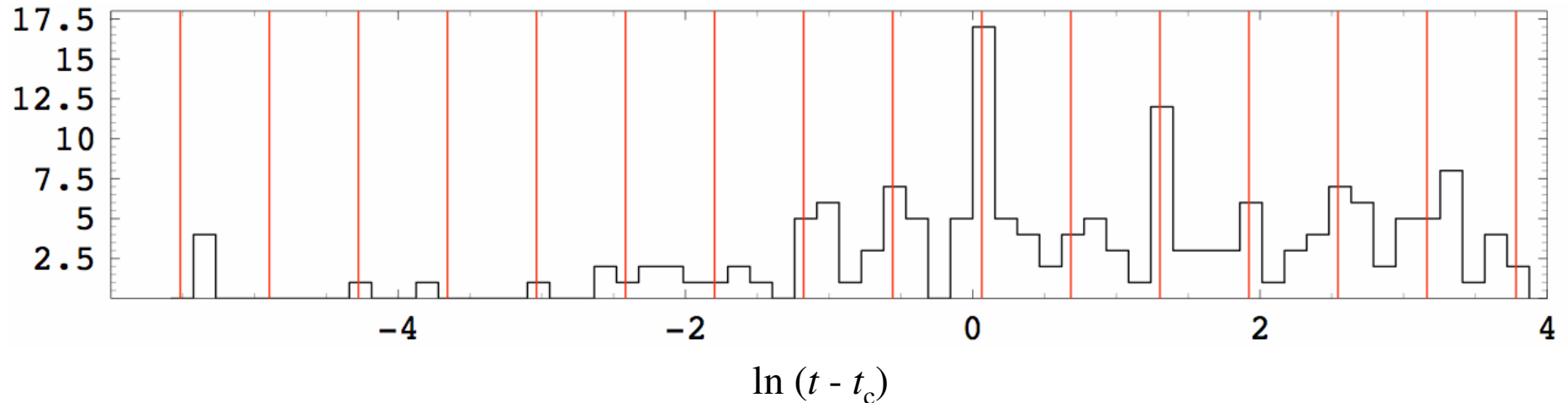
$t_c = 12.266$ (observé: 12.269); best fit, power = 15.01 (proba 6×10^{-6}),
période $\ln g = 0.619$, $g = 1.86$ ($\rightarrow g^2 = 3.4$: confirmation de 2008)

Tremblements de Terre



Sichuan 2008. Analyse des répliques

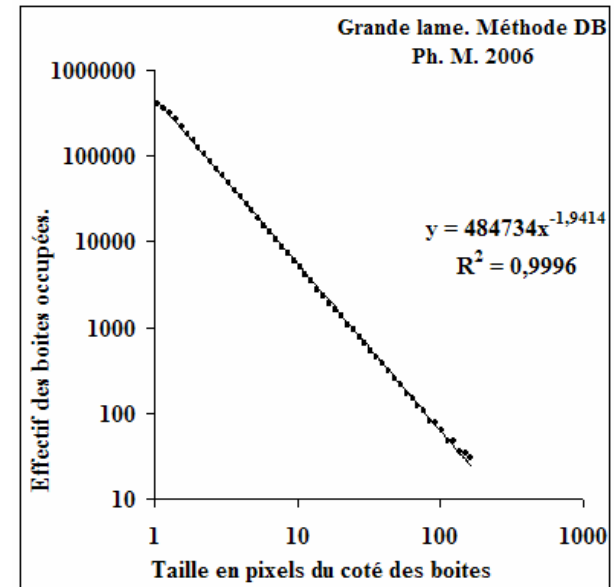
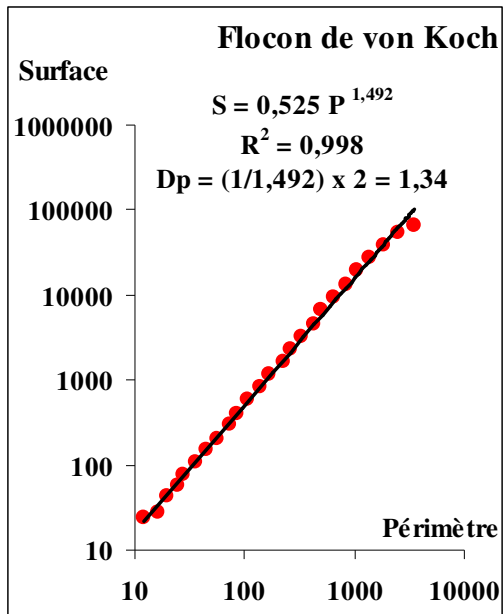
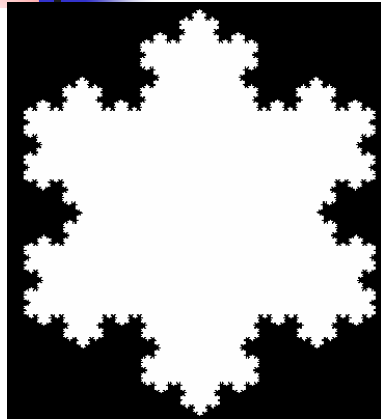
Nombre



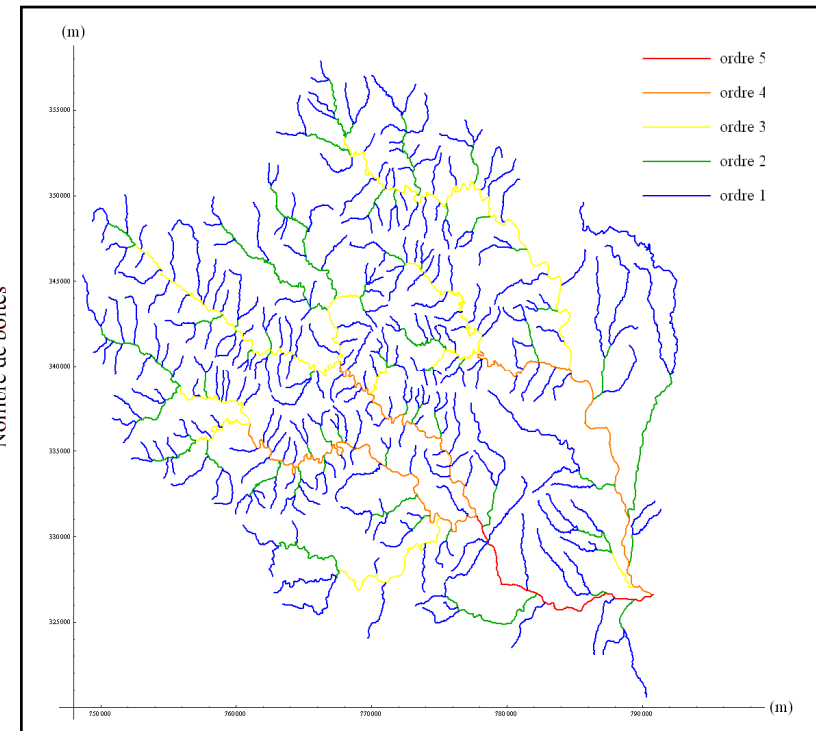
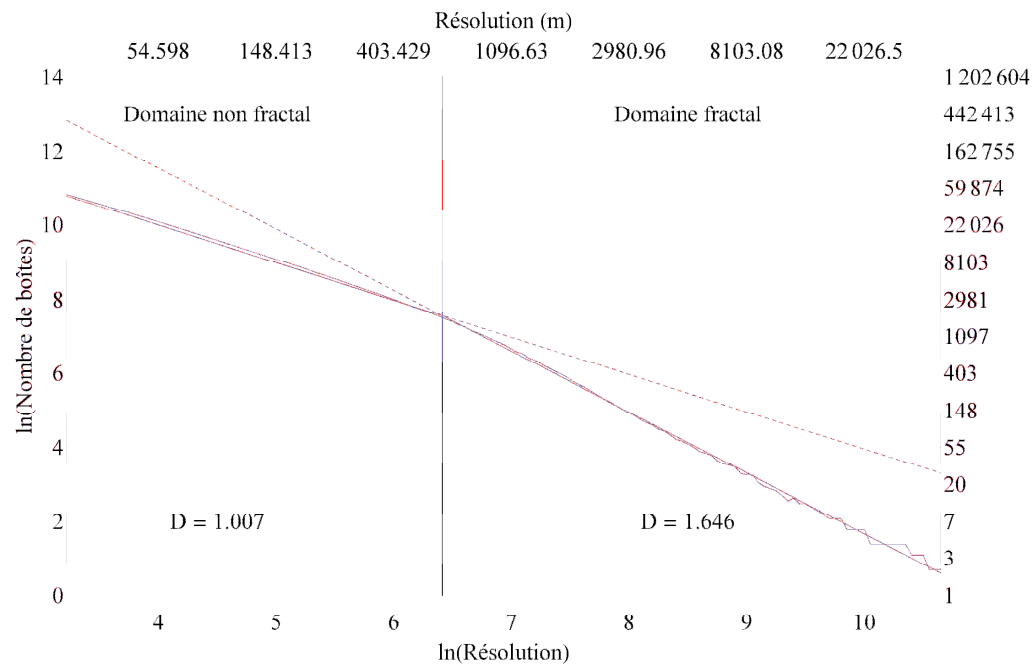
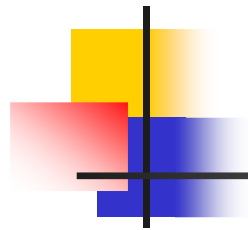
$t_c = 12.265$ (mai 2008) = date du séisme principal

Proba d'accord pic / creux : $P = 0.0001$

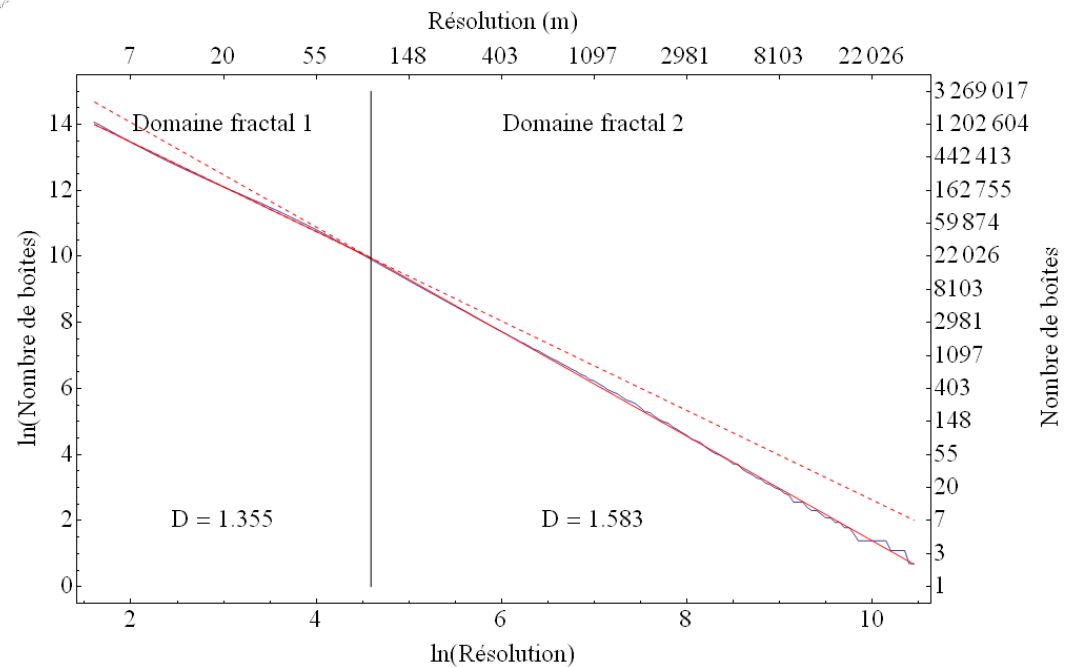
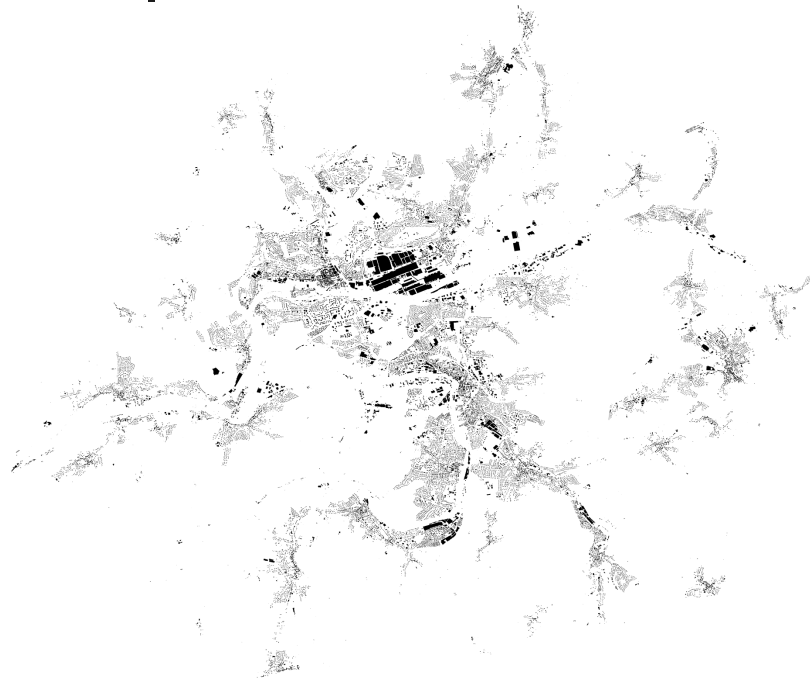
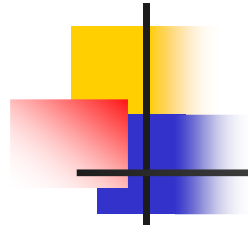
Invariance d'échelle : exemples



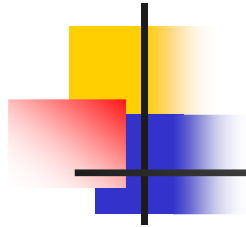
Transition Fractal – Non Fractal (F – NF) : le réseau hydrographique du Gardon



Multifractalité : La ville de Montbéliard



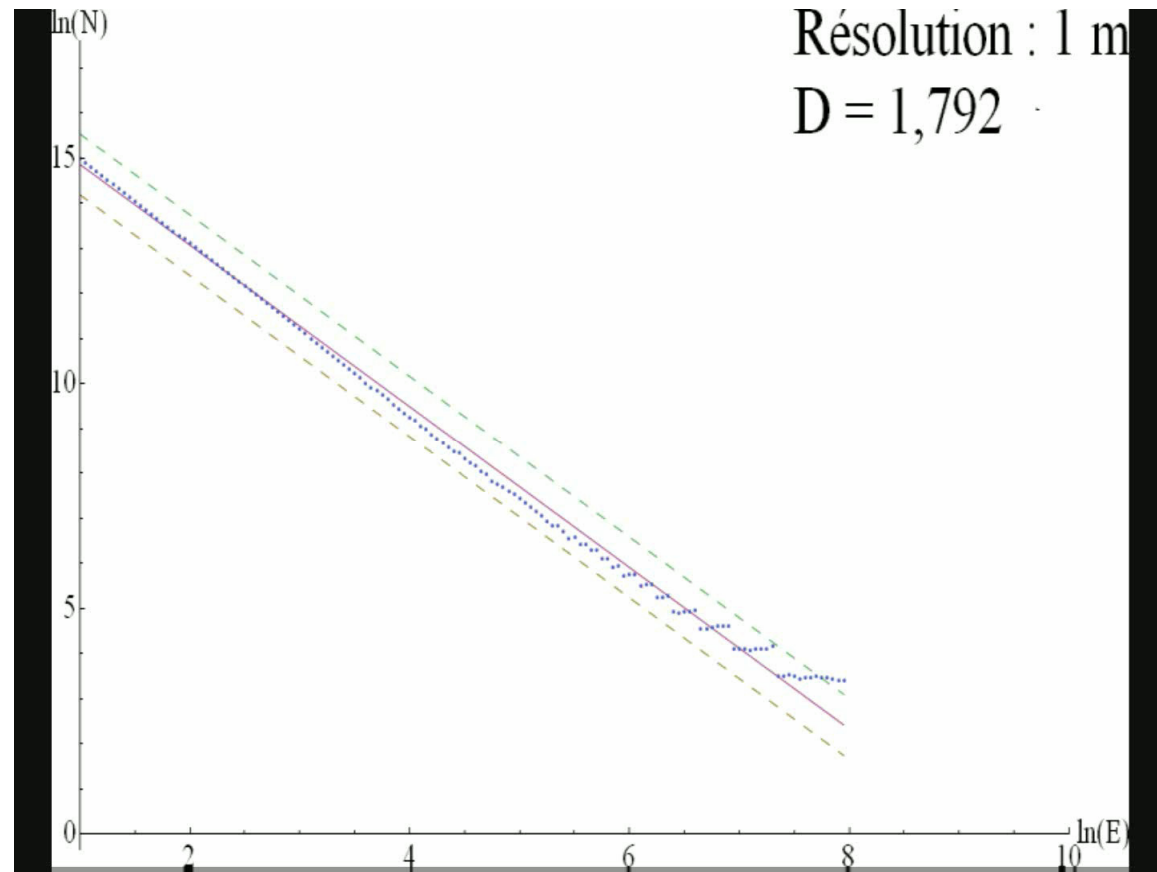
Avignon : variation de l'information



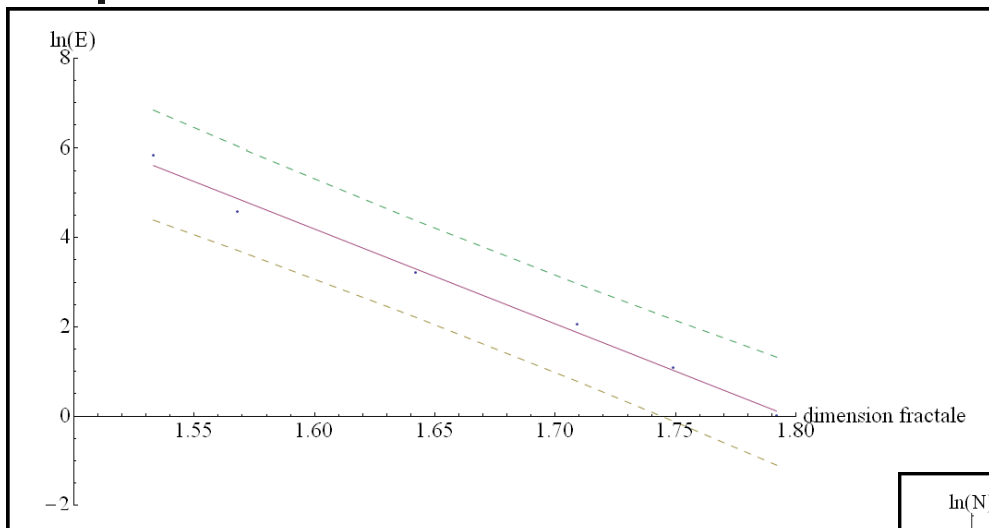
1m
3m
8m
25m
99m
345m



Avignon : dimension fractale variant avec la résolution



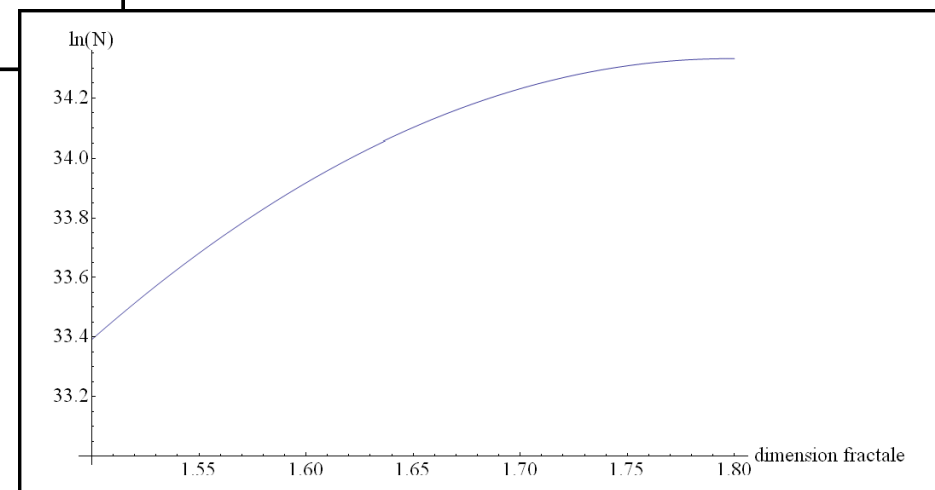
Avignon : relation entre la dimension fractale et la résolution : exemple d'accélération d'échelle



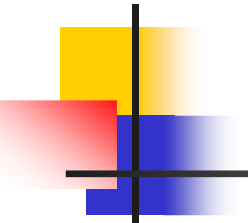
D_f vs $\ln(\varepsilon)$

Accélération d'échelle

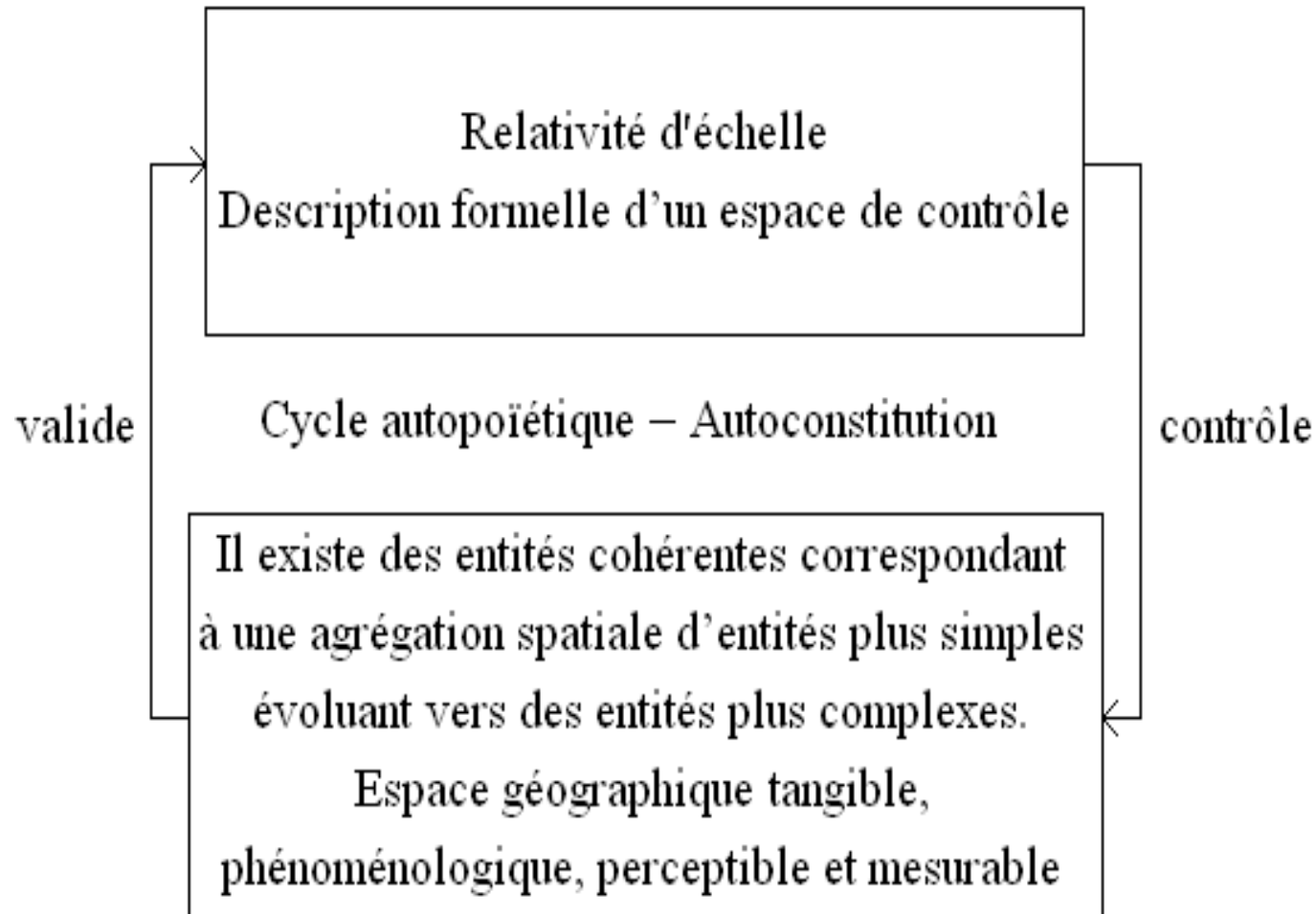
D_f vs $\ln(N)$



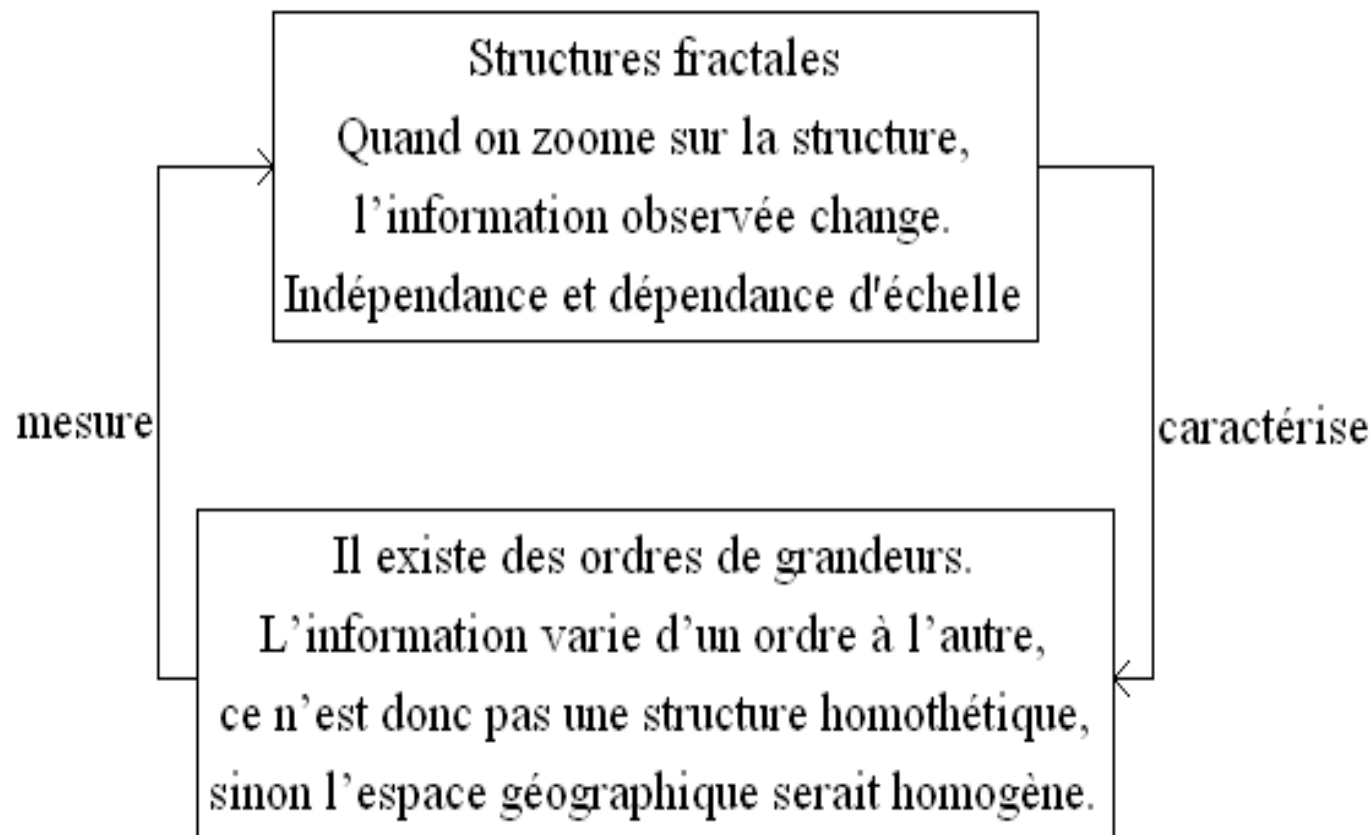
Relations entre les structures fractales observées et la relativité d'échelle

- 
-
- Approche analytique en géographie théorique
 - L'espace formel de contrôle comme l'espace tangible géographique doit avoir cinq dimensions (L, l, h, t, ε)

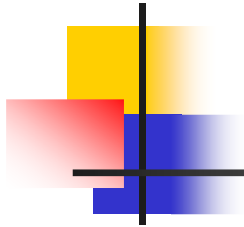
Cycle d'autoconstitution



Cycle d'autoconstitution



Conditions rationnelles de possibilité d'une théorie en géographie



Trois aspects disciplinaires à dépasser

1. La dualité géographie physique –
géographie humaine
2. La dualité lieu – espace
3. L'unicité catégorique (le seul mouvement)

Conditions rationnelles de possibilité d'une théorie en géographie

La RE est la pièce manquante du
puzzle qui permet de transformer
le dédale en itinéraire

