

UNIVERSITÉ D'AVIGNON  
ET DES PAYS DE VAUCLUSE



# Transition fractal – non fractal en géographie

Réflexion sur les lois d'échelle possibles à travers quelques cas

**Maxime Forriez, Allocataire - Moniteur en géographie – UMR ESPACE (Avignon)**

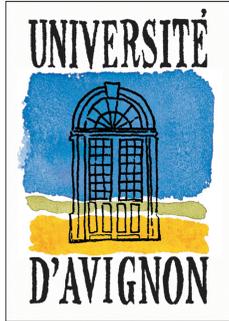
**Philippe Martin, Professeur de géographie – UMR ESPACE (Avignon)**

**Laurent Nottale, Directeur de recherche CNRS à l'Observatoire de Paris - Meudon**



**Maxime Forriez - UMR 6012 ESPACE (Avignon) -**



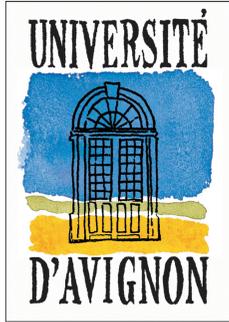


UNIVERSITÉ D'AVIGNON  
ET DES PAYS DE VAUCLUSE

## Qu'est-ce qu'une fractale ?



- Structure multi-échelle
- Structure spatiale ou temporelle non différentiable comme approximation
- Structure par niveaux (hiérarchique)

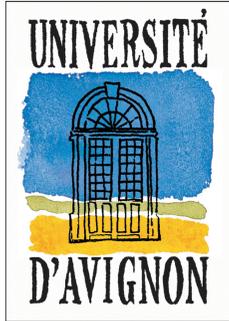


UNIVERSITÉ D'AVIGNON  
ET DES PAYS DE VAUCLUSE

## Qu'est-ce qu'une dimension fractale ?



- Pour un objet fractal, la dimension fractale correspond à la limite mathématique de la variation d'une variable par rapport à sa résolution.
  1. Elle peut être entière.
  2. Elle peut être réelle (cas le plus courant).
  3. Elle peut être complexe (log-périodicité)
  4. Elle peut être infinie (c'est-à-dire variable).
- La méthode de comptage des boîtes carrées a été choisie comme méthode de mesure car :
  - c'est la plus simple à programmer ;
  - c'est celle qui comporte un effet de bord limité (car connu) ;
  - c'est la plus efficace.

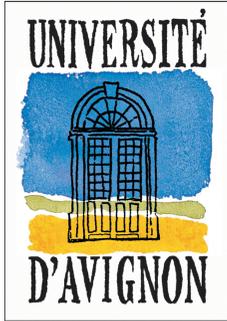


UNIVERSITÉ D'AVIGNON  
ET DES PAYS DE VAUCLUSE

## La relativité d'échelle



- Trois principes généraux
  1. Le principe de relativité : lois fondamentales valides quel que soit le système de coordonnées
  2. Le principe de covariance : invariance de forme des équations sous les changements de système de coordonnées
  3. Le principe d'équivalence : conditions de relativité de tel ou tel « objet » d'étude (gravitation en relativité générale d'Einstein)



UNIVERSITÉ D'AVIGNON  
ET DES PAYS DE VAUCLUSE

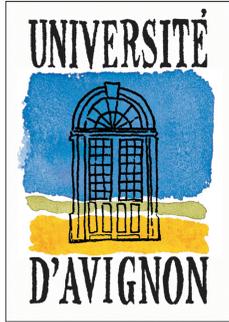
## La relativité d'échelle

Relativité	Variables qui caractérisent l'état du système de coordonnées	Variables qui définissent le système de coordonnées
Mouvement	Vitesse Accélération	Espace Temps
Échelle	Résolution	Logarithme de la longueur sur une fractale Dimension fractale variable



Maxime Forriez - UMR 6012 ESPACE (Avignon) -



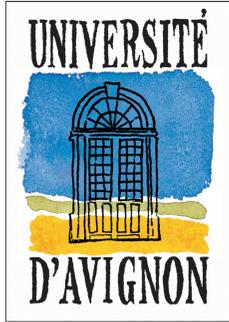


UNIVERSITÉ D'AVIGNON  
ET DES PAYS DE VAUCLUSE

## La relativité d'échelle



- Objectif : trouver les lois régissant de transformations dans l'espace des échelles (au sens des changements de résolution)
- La non différentiabilité de l'espace peut se décrire par l'introduction d'un espace des échelles qui, lui, est différentiable.



UNIVERSITÉ D'AVIGNON  
ET DES PAYS DE VAUCLUSE

## La relativité d'échelle - Méthode



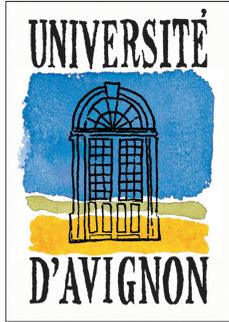
- Construction d'un opérateur de dilatation (méthode de Gell-Mann-Lévy)

$$\varepsilon' \rightarrow \varepsilon(1 + d\rho)$$

$$L(\varepsilon') = L(\varepsilon(1 + d\rho)) = L(\varepsilon) + (\varepsilon + \varepsilon d\rho - \varepsilon) \frac{\partial L(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} = L(\varepsilon) + \boxed{\frac{\partial}{\partial \ln \varepsilon}} L(\varepsilon)$$

- Recherche des lois d'échelle par un développement limité de Taylor

$$\frac{dL}{d \ln \varepsilon} = \beta(L) = a + bL + cL^2 + dL^3 + \dots$$

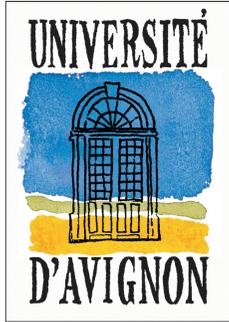


UNIVERSITÉ D'AVIGNON  
ET DES PAYS DE VAUCLUSE



## Quelles sont les lois de transformation d'échelle possibles ?

- Mathématiquement, la Relativité d'Echelle (RE) de Laurent Nottale (1993 ; 1998 ; 2009 en préparation) montre que la possibilité de lois d'échelle est infinie.
- Physiquement, la RE montre également qu'elles sont limitées à quelques cas.
  1. La loi sans transition (invariance d'échelle)
  2. La loi avec une transition
  3. La loi avec deux transitions
  4. Etc.



UNIVERSITÉ D'AVIGNON  
ET DES PAYS DE VAUCLUSE

## Loi sans transition de l'invariance d'échelle



- Classiquement, on associe fractale, invariance d'échelle et autosimilarité.
- Toutefois, l'invariance d'échelle n'est qu'un cas particulier des lois de dépendance d'échelle possibles

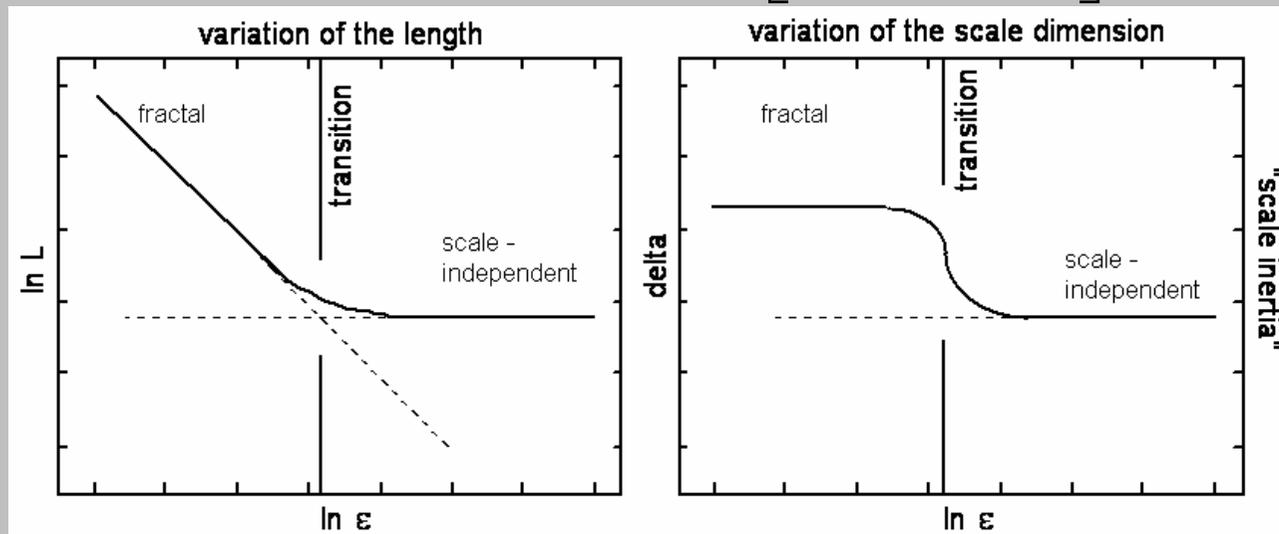
$$\frac{dL}{d \ln \varepsilon} = bL \Leftrightarrow L(\varepsilon) = L_0 \left( \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \right)^{D-D_T}$$

$\varepsilon$  : résolution ;  $L$  : longueur ;

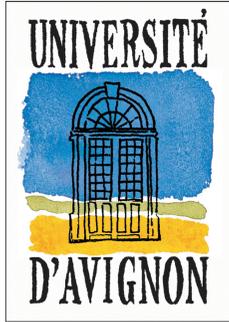
$\varepsilon_0$  : échelle de coupure ;  $L_0$  : longueur initiale

## Loi d'échelle avec une transition

$$\frac{dL}{d \ln \varepsilon} = a + bL \Leftrightarrow L(\varepsilon) = L_0 \left[ 1 + \left( \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \right)^{D-D_T} \right]$$



Dépendance d'échelle de la longueur et de la dimension d'échelle effective ( $\delta = D - 1$ ) dans le cas de lois d'« inertie d'échelle ».

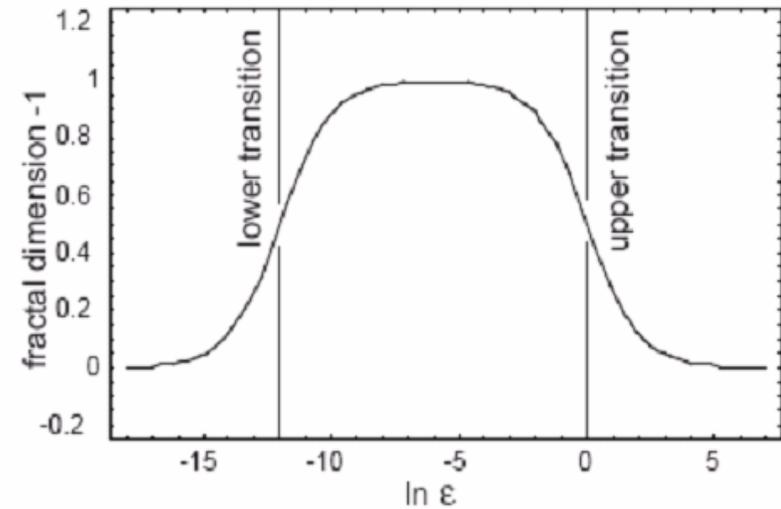
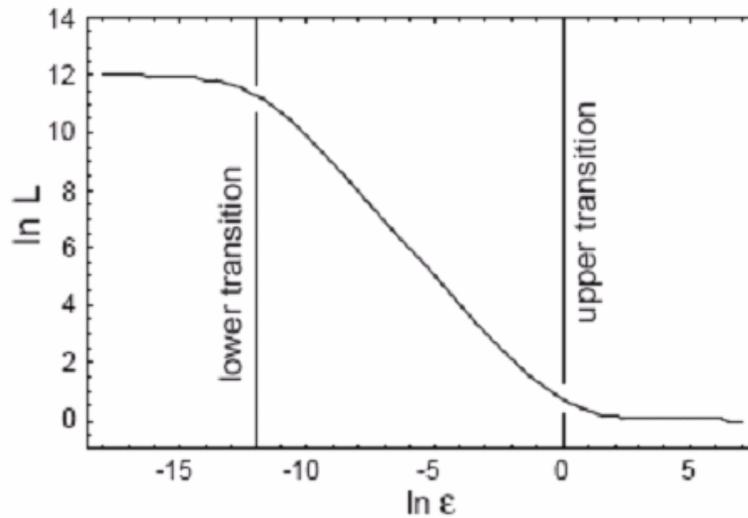


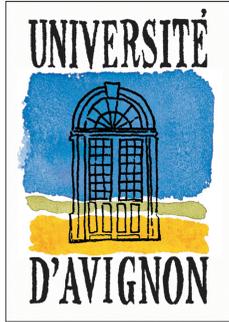
UNIVERSITÉ D'AVIGNON  
ET DES PAYS DE VAUCLUSE

## Loi d'échelle avec deux transitions



$$\frac{dL}{d \ln \varepsilon} = a + bL + cL^2 \Leftrightarrow L(\varepsilon) = L_0 \left[ \frac{1 + \left( \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \right)^{D-D_T}}{1 + \left( \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \right)^{D-D_T}} \right]$$



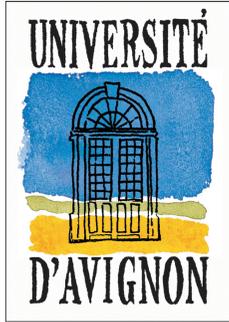


UNIVERSITÉ D'AVIGNON  
ET DES PAYS DE VAUCLUSE

## Loi d'échelle à compléter et à découvrir



- Il existe d'autres lois déjà proposées (dimension fractale variable *via* une force d'échelle, covariance d'échelle, *etc.*).
- Des corrections peuvent compléter ces trois lois principales
  1. La correction log-périodique ;
  2. L'utilisation de structures multifractales.
- Les autres lois d'échelles restent à découvrir.

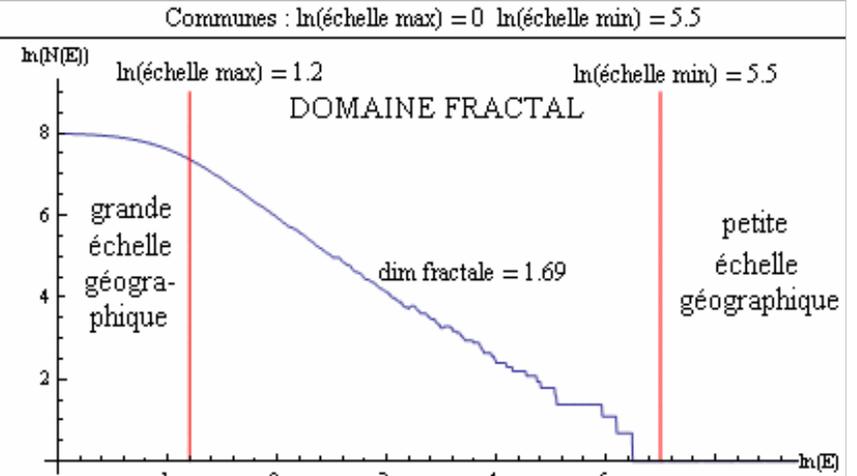
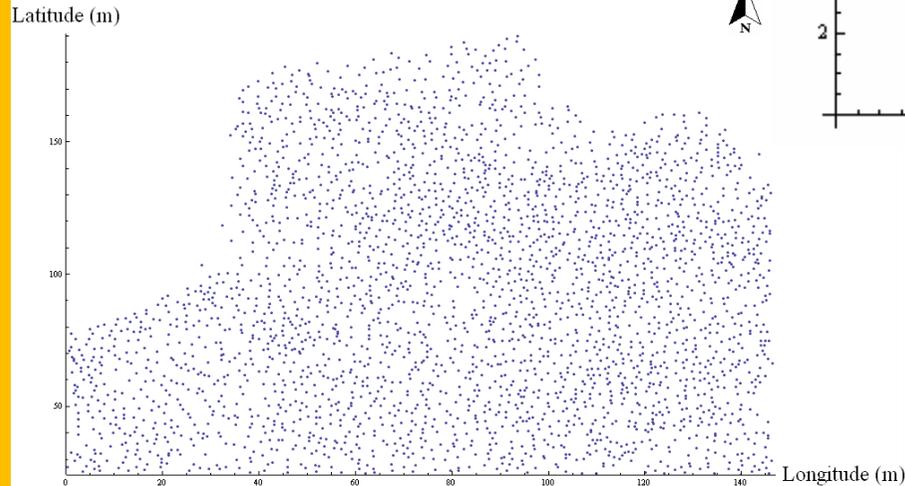


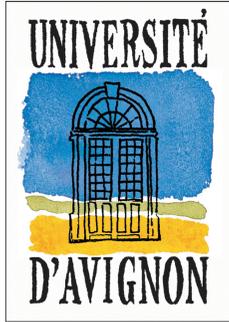
UNIVERSITÉ D'AVIGNON  
ET DES PAYS DE VAUCLUSE

# Cas du nuage de points : la répartition des chefs-lieux dans le Nord de la France



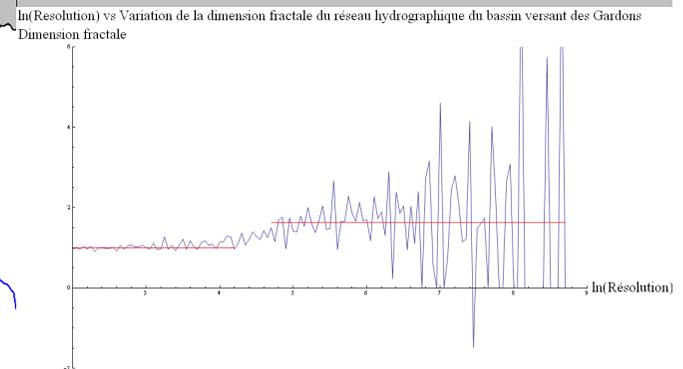
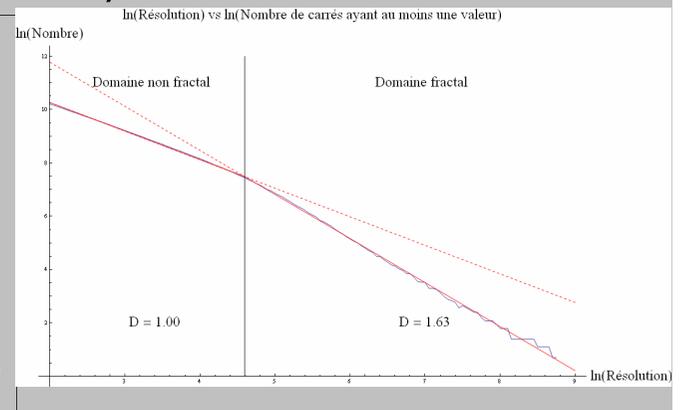
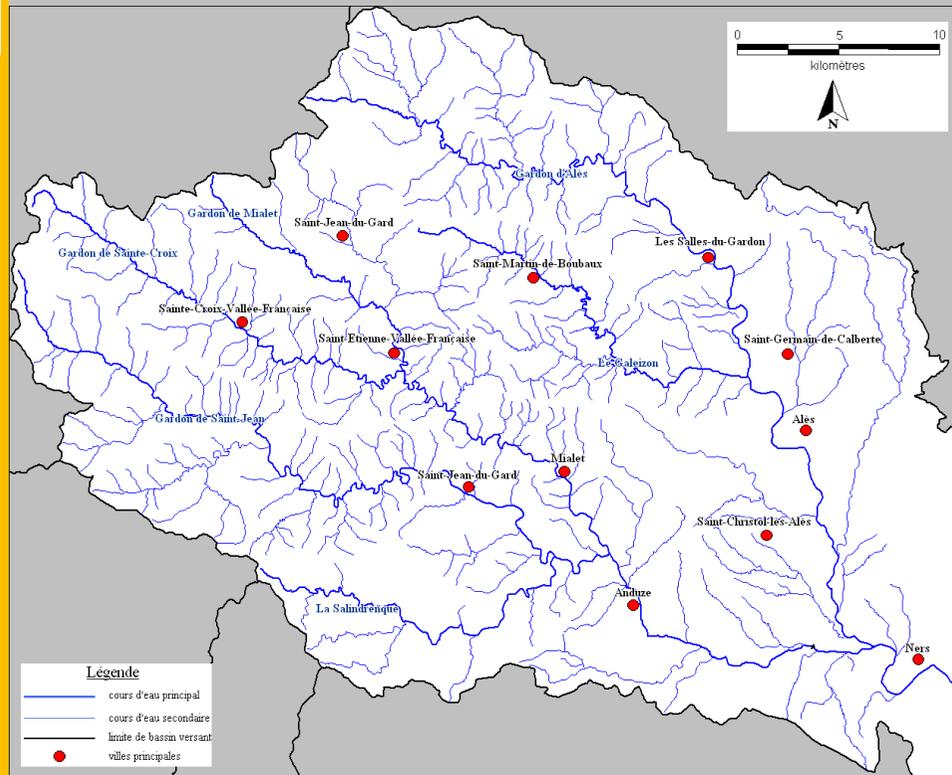
Répartition des centres des communes du Nord de la France





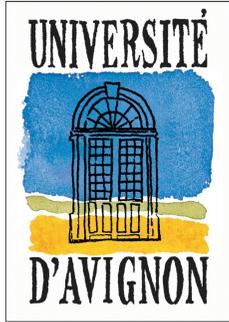
UNIVERSITÉ D'AVIGNON  
ET DES PAYS DE VAUCLUSE

## Cas avec des éléments linéaires : le réseau hydrographique des Gardons (Gard)



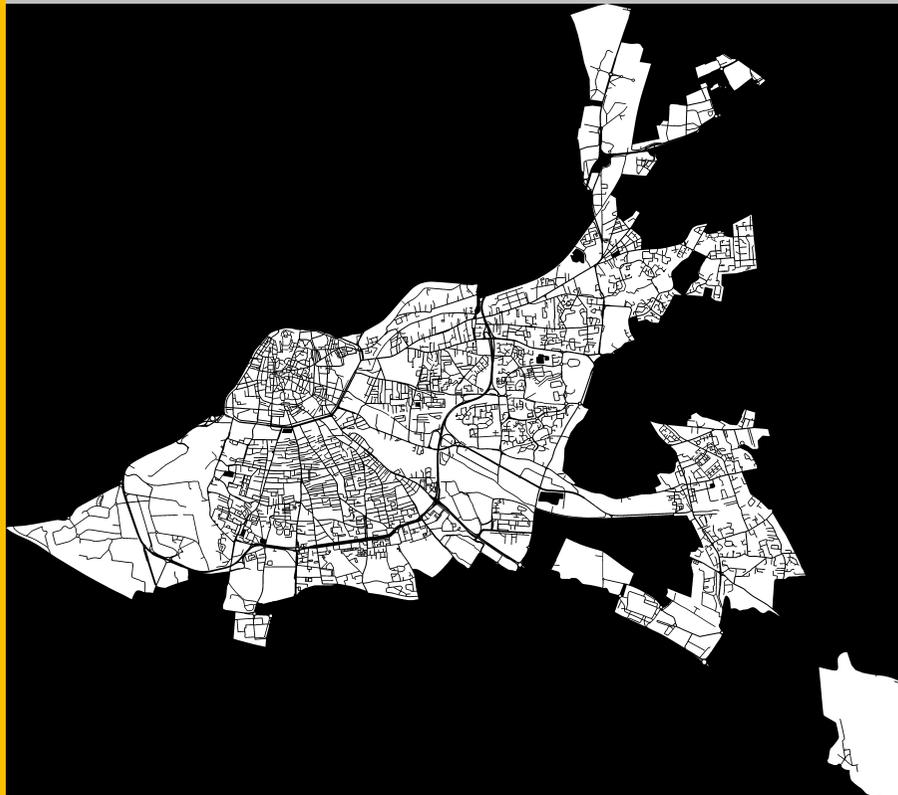
Source : Bd Carthage

Maxime Forriez - UMR 6012 ESPACE (Avignon) -

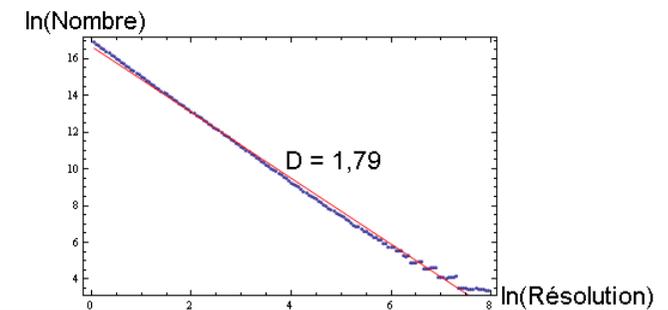


UNIVERSITÉ D'AVIGNON  
ET DES PAYS DE VAUCLUSE

## Cas avec des éléments surfaciques : la surface de la ville d'Avignon (Vaucluse)

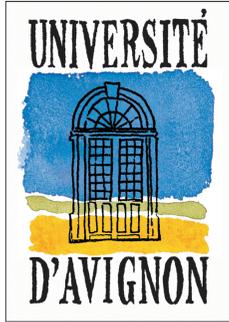


ln(Résolution) vs ln(Nombre de boîtes ayant au moins un pixel)



Source : mappy

Maxime Forriez - UMR 6012 ESPACE (Avignon) -

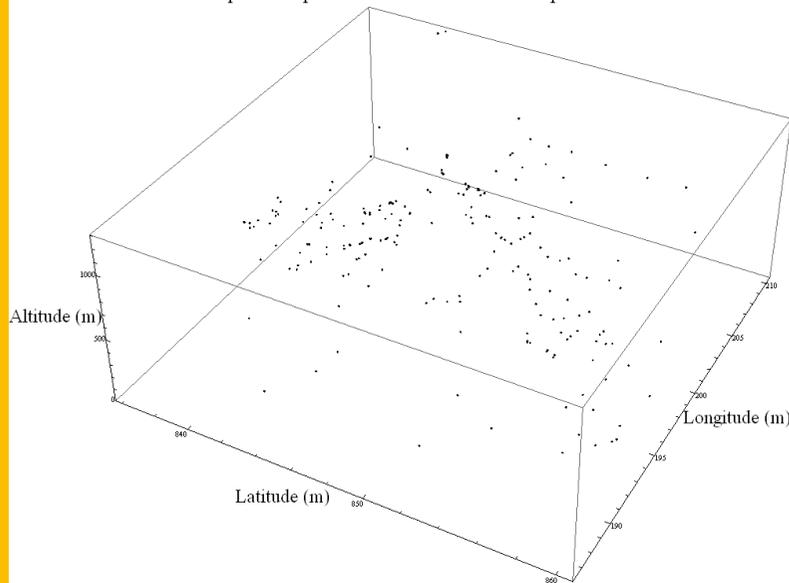


UNIVERSITÉ D'AVIGNON  
ET DES PAYS DE VAUCLUSE

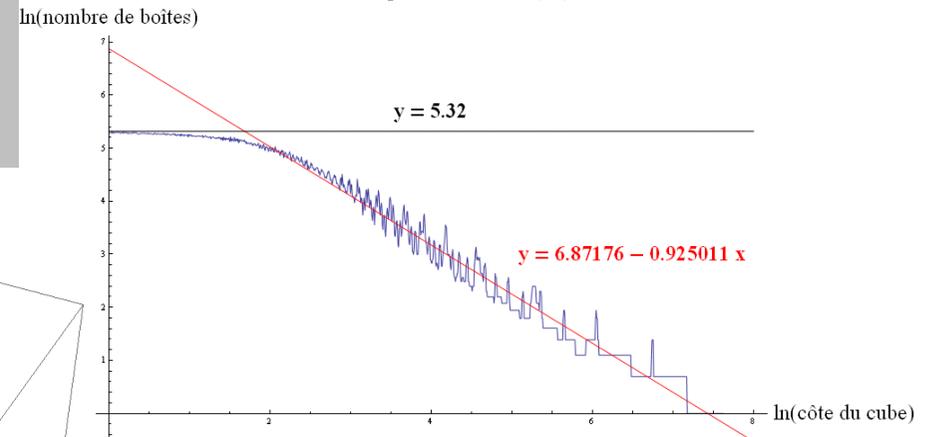
# Cas avec des éléments ponctuels mais en 3D : la répartition des entrées de cavités sur le plateau d'Albion (Vaucluse)

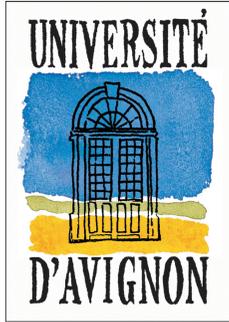


Répartition spatiale de l'entrée des cavités du plateau d'Albion



Cavités du plateau d'Albion (84)



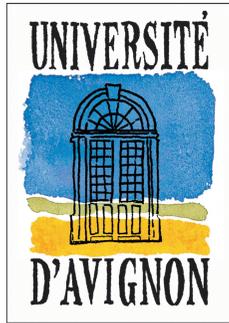


UNIVERSITÉ D'AVIGNON  
ET DES PAYS DE VAUCLUSE

## Conclusion



- Les lois d'échelle ne doivent pas être limitées au cas restrictif de l'invariance d'échelle et de l'autosimilarité.
- Les lois d'échelle sont variées et demeurent largement à découvrir.
- La transition fractal – non fractal est fondamentale pour comprendre l'apparition et la disparition apparente de la fractalité.
- La dépendance d'échelle est un phénomène trop central de la constitution d'un espace géographique hétérogène, que nous avons à étudier, pour que la géographie s'en détourne.
- Problème ouvert. Comment distinguer les échelles de coupure virtuelles des échelles de coupure réelles ?



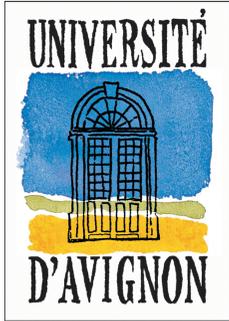
UNIVERSITÉ D'AVIGNON  
ET DES PAYS DE VAUCLUSE

Merci de votre attention



Maxime Forriez - *UMR 6012 ESPACE (Avignon)* -





UNIVERSITÉ D'AVIGNON  
ET DES PAYS DE VAUCLUSE



# Transition fractal – non fractal en géographie

Réflexion sur les lois d'échelle possibles à travers quelques cas

**Maxime Forriez, Allocataire - Moniteur en géographie – UMR ESPACE (Avignon)**

**Philippe Martin, Professeur de géographie – UMR ESPACE (Avignon)**

**Laurent Nottale, Directeur de recherche CNRS à l'Observatoire de Paris - Meudon**



**Maxime Forriez - UMR 6012 ESPACE (Avignon) -**

