

## L'analyse morphologique du réseau du bassin versant des Gardons

Roger Moussa et Claude Bocquillon (1993) ont étudié la fractalité du bassin versant du Gardon d'Anduze. Ils avaient calculé des dimensions fractales sur la forme du réseau hydrographique et sur celle du bassin versant. Cette étude va étendre l'analyse morphologique, en la généralisation *via* les méthodes de la relativité d'échelle, à l'ensemble des Gardons avec comme point aval limite le Pont de Ners.

### 6.1. Présentation des données

Les informations utilisées pour cette étude sont issues de la base de données gratuite I.G.N.©-CARTHAGE (CARtographie, THématique des AGences de l'eau et du ministère de l'Environnement), disponible sur le site : <http://services.sandre.eaufrance.fr/data/zonage/Hydrographie2007/>. Celui-ci fournit la cartographie du réseau hydrographique français sous un format MapInfo©MapInfo Corporation. Le système d'information géographique possède onze couches : `cours_d_eau.mif` ; `hydrographie_surfacique.mif` ; `hydrographie_texture.mif` ; `laisse.mif` ; `nœud_hydrographique.mif` ; `point_eau_isole.mif` ; `region_hydrographique.mif` ; `secteur.mif` ; `sous_secteur.mif` ; `troncon_hydrographique.mif` ; `zone_hydrographique.mif`.

La couche « `cours_d_eau` » fournit le tracé linéaire des cours d'eau principaux. Toutefois, les données ne sont pas complètes. Elles sont limitées « à l'ensemble des tronçons hydrographiques touchant la zone de livraison » (notice de Carthage). La couche « `troncon_hydrographique` » correspond à une décomposition des cours d'eau officiels en branches par rapport à la couche précédente, il s'agit d'ajouter de manière la plus exhaustive possible les cours d'eau intermittents et temporaires. La couche « `hydrographie_surfacique` » fournit la surface des cours d'eau principaux, ainsi que les différentes nappes d'eau libres terrestres.

La couche « `nœud_hydrographique` » correspond à une modification de l'écoulement. Elle permet de localiser les sources, les barrages, *etc.* La couche « `point_eau_isole` » situe les points d'eau non connectés aux réseaux hydrographiques (château d'eau, réservoir, *etc.*).

Les couches « `region_hydrographique` », « `secteur` », « `sous_secteur` » et « `zone_hydrographique` » correspondent au périmètre des bassins versants élémentaires en suivant un jeu d'emboîtement d'échelles.

La couche « `hydrographie_texture` » correspond à une « zone plate au drainage complexe dans laquelle circule un ensemble de portions de cours d'eau formant un entrelacs de bras d'égale importance » (notice de Carthage).

La couche « `laisse` » ne concerne que les littoraux maritimes. Elle fournit les limites des hautes et basses eaux.

### 6.1.1. Critique de la base CARTHAGE

Cette base de données est fort utile, car toutes les données connues sont censées être répertoriées. L'unique défaut qui apparaît de manière récurrente est un problème de connexion entre les différentes branches du réseau qui sont parfois mal connectées.

D'après la notice, l'unité de référence est le mètre et la projection associée est le Lambert II étendu, avec pour méridien d'origine le méridien de Paris. La véritable résolution de la base Carthage varie de 1 / 50 000 au minimum à 1 / 5 000 000 au maximum. Toutefois, l'échelle la plus fréquente reste l'échelle minimale de 1 / 50 000 (<http://www.observatoire-environnement.org/OBSERVATOIRE/acteur-donnee/donnees-ORE70.html>).

### 6.1.2. Extraction des données sur *Mathematica*©Wolfram

Pour mener une étude morphologique du réseau hydrographique des Gardons, la puissance et les possibilités de calculs de *MapInfo* sont insuffisantes. La réalisation d'une analyse spatiale plus avancée nécessite un outil informatique plus puissant ; le logiciel retenu est *Mathematica*.

C'est un logiciel de calcul formel qui possède son propre langage informatique. Il permet de travailler directement sur des matrices (images, tableau numérique, *etc.*). Il possède plus de 5 000 fonctions pré-réglées dans son langage ; les possibilités de modélisation y sont dès lors très importantes. À côté de ces 5 000 symboles courants, il existe ce que l'on appelle des « packages » qui sont des modules de calculs spécifiques à certains domaines mathématiques. Par exemple, il existe plusieurs modules de statistique. L'avantage de *Mathematica* qui peut aussi être perçu comme son plus grand défaut, est son absence de fioriture. A l'ouverture d'une nouvelle feuille de calcul s'affiche un écran blanc. Tout est à créer, à penser, à organiser. L'utilisateur doit écrire intégralement ses programmes. Le code étant un langage, on apprend à chaque utilisation de nouvelles fonctions. Ainsi, rapidement, on crée des petites routines informatiques que l'on peut injecter dans ces nouveaux programmes. On s'aperçoit alors que l'utilisation de logiciels tels que MapInfo et ArcGIS possèdent des « boîtes noires » relativement importante, ce qui n'est pas le cas avec *Mathematica* qui est donc un outil indispensable à l'analyse spatiale.

Toutefois, si *Mathematica* est capable de générer une centaine de sorties différentes (images, films, sons, tableau Excel, *etc.*), l'importation des données géoréférencées sur *Mathematica* est plus délicate. Pour le réseau hydrographique des Gardons, il fallut prendre le fichier `cours_d_eau.mif`. Ce fichier fournit le système de projection et décompose les différents objets vectoriels de la couche des données ainsi chaque cours d'eau est différencié. Un long travail de découpage des données sur Excel a été nécessaire pour individualiser les cours d'eau, car il faut maintenir l'ordre des objets du fichier mif puisque les noms des cours d'eau se trouvent dans un autre fichier (\*.txt), mais l'ordre des noms suit celui des objets vectoriels. Après cette réorganisation des données, on peut les enregistrer sous un format *Mathematica* avec des accolades pour signaler les colonnes et les lignes de la matrice des vecteurs composants le cours d'eau. Malheureusement, les cours d'eau ne sont pas des branches au sens de la théorie des graphes. Il faut donc les découper à nouveau de façon à obtenir la portion d'un cours d'eau entre deux confluences. On peut pour cela utiliser *Mathematica* qui fournit une solution très simple avec la fonction Union. Autrement dit, le passage d'un format S.I.G. à *Mathematica* demande beaucoup de patience, mais les résultats obtenus au fil de ce texte montreront l'utilité de ce logiciel.

---

## 6.2. Cartographie

Grâce à la superposition d'une base des cartes numérisées au 1 / 25 000 de l'I.G.N. et CARTHAGE (couche « `cours_d_eau` »), on peut créer des cartes sur le bassin étudié.

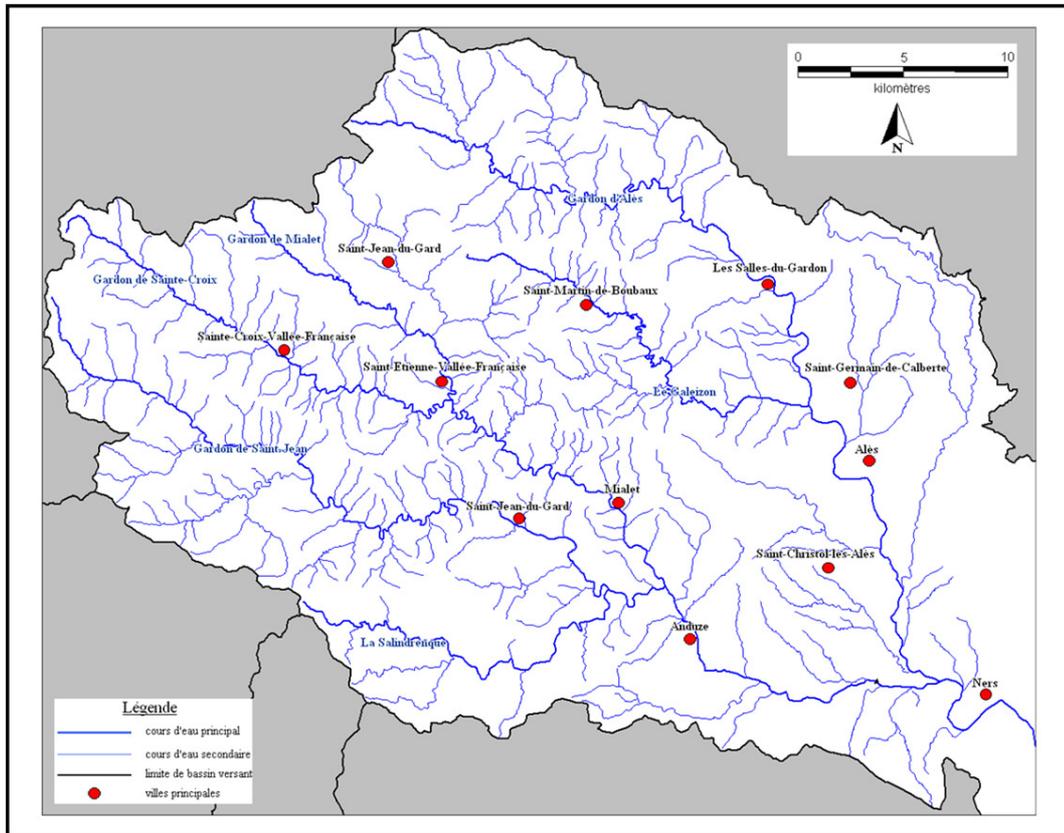


Figure 30. Réseau hydrographique des Gardons (des sources jusqu'au pont de Ners)

La Figure 30 présente le réseau hydrographique principal du bassin versant des Gardons étudié. Le réseau est composé de six cours d'eau principaux : la Salindrenque, le Gardon de Saint-Jean, le Gardon de Sainte-Croix, le Gardon de Mialet, le Galeizon et le Gardon d'Alès. Autour de ces drains, un réseau en arêtes de poisson se déploie. À côté de ce réseau principal, CARTHAGE possède également une couche avec tous les cours d'eau secondaires (troncon\_hydrographique). Elle présente l'avantage d'être déjà pré-découpée en branches, son importation dans Mathematica a donc été plus simple. Pour des raisons pratiques, la première couche sera appelée RESEAU 1 et la seconde RESEAU 2. RESEAU 2 (1 694 branches) n'est autre qu'une densification de RESEAU 1 (618 branches). La possibilité d'une comparaison entre les deux réseaux apparaît donc très intéressante, mais avant il faut nécessairement rappeler quelques lois sur les arborescences déterministes afin de mieux comprendre une arborescence réelle.

### 6.3. Données générales sur les arborescences

Un réseau hydrographique est une arborescence particulière. Toutefois, il n'échappe pas à certaines règles mathématiques connues des arborescences qu'il faut rappeler.

### 6.3.1. Définition d'une arborescence

D'après la théorie des graphes, un arbre est un graphe non orienté, connexe et sans cycle (Labelle, 1981 ; Mathis, 2001 ; Mathis, 2003a ; Mathis, 2003b). Par contre, on appellera arborescence un graphe orienté, connexe et sans cycle. Un réseau hydrographique est évidemment une arborescence car l'écoulement est orienté. Pour faciliter l'assimilation, il n'est pas rare de transformer le vocabulaire classique de la théorie des graphes par une analogie avec la terminologie des « arbres naturels ». Ainsi, un sommet devient un nœud et un arc devient une branche. Rappelons qu'un arc est une relation orientée entre deux sommets. Dans le cas des arcs, la succession des sommets suit un ordre précis, dû à son orientation ; on parle alors de chemin. Dans le cas des arborescences, il est donc possible de connaître l'intégralité des chemins possibles.

### 6.3.2. Construire une arborescence

Une arborescence est une structure topologique très simple, mais dès qu'on la géométrise, c'est-à-dire que l'on en fait un graphe valué par des distances, elle devient une structure complexe où des contraintes d'optimalité jouent un rôle fondamental. Si l'on prend le cas d'école d'un « arbre naturel » dans une coupe à deux dimensions, on s'aperçoit que la gravité contraint le développement des branches, ce qui fait que chaque branche  $n + 1$  doit nécessairement être une réduction de la branche  $n$ . Sachant cela, la construction d'un arbre déterministe se limite à trois paramètres : le nombre de branches  $k$ , l'angle de référence entre ces branches  $\alpha$  et le rapport de réduction  $1/g$  (Figure 31). Etant donné qu'une connaissance de la position dans le plan est fondamentale, l'utilisation des nombres complexes est une nécessité car les formules sont considérablement simplifiées et beaucoup plus efficaces.

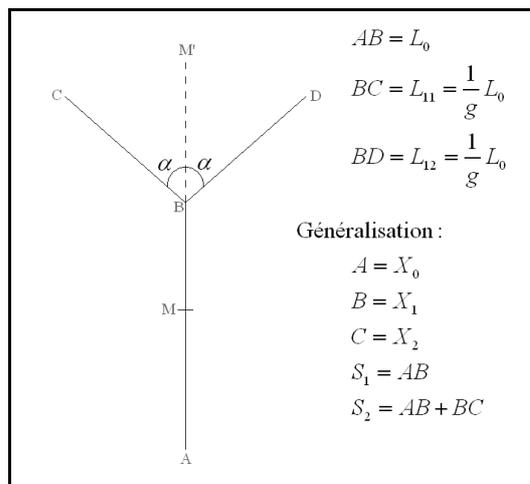


Figure 31. Embranchements élémentaires d'une arbre déterministe pour  $k = 2$

Avec cet exemple (Figure 31), on met en évidence la décomposition suivante.

- (1) Entre le vecteur  $\mathbf{AB}$  et  $\mathbf{AM}$ , il existe une homothétie telle que :

$$\mathbf{AM} = \frac{1}{g} \mathbf{AB}$$

Il existe également une relation de colinéarité entre  $\mathbf{AM}$  et  $\mathbf{BM}'$ , d'où  $\mathbf{AM} = \mathbf{BM}'$ , ce qui donne en écriture complexe :

$$z_{\mathbf{AM}} = \frac{1}{g} z_{\mathbf{AB}} = z_{\mathbf{BM}'}$$

- (2) Entre le vecteur  $\mathbf{BM}'$  et le vecteur  $\mathbf{BC}$ , il existe une rotation de centre B et d'angle  $\alpha$  :

$$z_{\mathbf{BC}} = e^{i\alpha} z_{\mathbf{BM}'}$$

(3) En combinant l'homothétie, la translation et la rotation, on obtient la formule directe :

$$z_{\mathbf{BC}} = \frac{1}{g} e^{i\alpha} z_{\mathbf{AB}}.$$

Cette formule est nécessaire, mais pas suffisante pour obtenir une arborescence. En effet, il faut tenir compte du niveau de la branche  $n$  et de la position de la nouvelle branche  $m$ . Dans notre cas binaire, si  $m$  est impair  $\alpha$  sera positif et si  $m$  est pair,  $\alpha$  sera négatif, ce qui donne la formule :

$$\begin{cases} z_{n+1, m'} = \frac{1}{g^n} e^{i\alpha} z_{n, m} & \text{avec } m' \text{ pair} \\ z_{n+1, m'+1} = \frac{1}{g^n} e^{i\alpha} z_{n, m} & \text{avec } m' + 1 \text{ impair} \end{cases}$$

Ensuite, on peut très facilement obtenir les coordonnées cartésiennes. Il suffit de poser :  $z_n$  comme étant le vecteur père et  $z_{n+1, m}$  et  $z_{n+1, m+1}$  ses vecteurs fils.

$$z_n = x + iy$$

$$z_{n+1} = X + iY$$

Après quelques calculs, on trouve que  $X$  et  $Y$  sont liés à  $x$  et  $y$  par :

$$\begin{cases} X = \frac{1}{g} (x \cos \alpha - y \sin \alpha) \\ Y = \frac{1}{g} (x \sin \alpha + y \cos \alpha) \end{cases} \quad \text{si } m \text{ est pair}$$

ou

$$\begin{cases} X = \frac{1}{g} (x \cos \alpha + y \sin \alpha) \\ Y = \frac{1}{g} (-x \sin \alpha + y \cos \alpha) \end{cases} \quad \text{si } m \text{ est impair}$$

Malheureusement, ces formules ne se généralisent pas facilement pour  $k > 2$ , mais il est possible de construire un algorithme informatique qui permet de trouver localement les vecteurs et de tracer l'arbre comme celui de la Figure 34. Pour obtenir une généralisation, il suffit de définir les branches de l'arbre par la base de numération, fournie par le nombre de branches (Mandelbrot, 1982 ; Mathis, 2001), tout comme la courbe de Helge van Koch (Nottale et Schneider, 1984).

### 6.3.3. Arborescence et base de numération

Les arbres ne peuvent être définis que par une base de numération incomplète. Toutefois, elle permet de savoir sur quelle branche on se trouve de manière extrêmement précise.

## 6.3.3.1. Le cas d'un double embranchement (base 2)

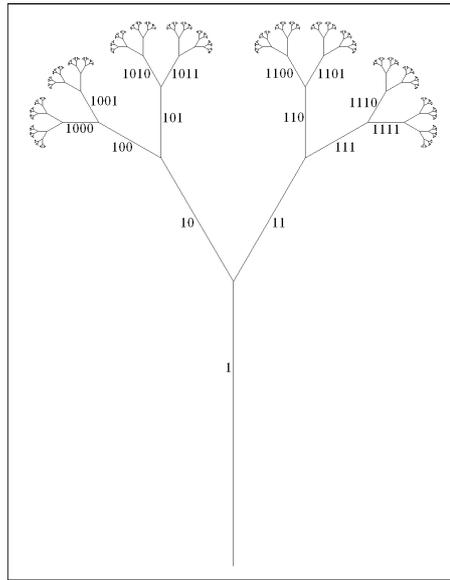


Figure 32. Arbre déterministe avec un générateur possédant deux embranchements

0	<b>111</b>	<b>1110</b>	<b>10 101</b>	<b>11 010</b>
<b>1</b>	<b>1000</b>	<b>1111</b>	<b>10 110</b>	<b>11 011</b>
<b>10</b>	<b>1001</b>	<b>10 000</b>	<b>10 111</b>	<b>11 100</b>
<b>11</b>	<b>1010</b>	<b>10 001</b>	<b>11 000</b>	<b>11 101</b>
<b>100</b>	<b>1011</b>	<b>10 010</b>	<b>11 001</b>	<b>11 110</b>
<b>101</b>	<b>1100</b>	<b>10 011</b>	<b>11 100</b>	<b>11 111</b>
<b>110</b>	<b>1101</b>	<b>10 100</b>	<b>11 101</b>	

Figure 33. Base 2 et arbre déterministe à deux branches

En gras : les nombres servant à se repérer sur l'arbre.

La base de numération est un outil pratique pour savoir précisément sur quelle branche on se situe. Pour ce, il suffit de décomposer le nombre, par exemple 10101, en deux. Le nombre le plus à droite (1) correspond à la position sur l'embranchement, celui de gauche est noté 0, celui de droite, 1. Pour 10101, on est positionné sur la branche de droite. À partir de chiffre restant (1010), on peut remonter jusqu'à la mère, et ainsi décomposer le chemin sur l'arbre. La branche fille de 10101 est 1010, qui a pour branche fille 101, qui a pour branche fille 10, qui a branche fille 1, c'est-à-dire le tronc. Enfin, il faut savoir que cette décomposition engendre des pertes. La Figure 33 associée à la Figure 32, montre qu'un arbre auto similaire exprimé en base de numération 2 ne possède qu'une perte numérique : le 0.

6.3.3.2. Le cas d'un triple embranchement (base 3)

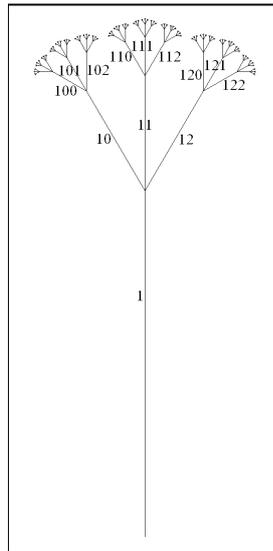


Figure 34. Arbre déterministe avec un générateur possédant trois embranchements

0	<b>100</b>	200	<b>1000</b>	<b>1100</b>	<b>1200</b>	2000	2100	2200
<b>1</b>	<b>101</b>	201	<b>1001</b>	<b>1101</b>	<b>1201</b>	2001	2101	2201
2	<b>102</b>	202	<b>1002</b>	<b>1102</b>	<b>1202</b>	2002	2102	2202
<b>10</b>	<b>110</b>	210	<b>1010</b>	<b>1110</b>	<b>1210</b>	2010	2110	2210
<b>11</b>	<b>111</b>	211	<b>1011</b>	<b>1111</b>	<b>1211</b>	2011	2111	2211
<b>12</b>	<b>112</b>	212	<b>1012</b>	<b>1112</b>	<b>1212</b>	2012	2112	2212
20	<b>120</b>	220	<b>1020</b>	<b>1120</b>	<b>1220</b>	2020	2120	2220
21	<b>121</b>	221	<b>1021</b>	<b>1121</b>	<b>1221</b>	2021	2121	2221
22	<b>122</b>	222	<b>1022</b>	<b>1122</b>	<b>1222</b>	2022	2122	2222

Figure 35. Base 3 et arbre déterministe à trois branches

En gras : les nombres servant à se repérer sur l'arbre

L'exemple de la base est utile pour comprendre le fait que l'on n'utilise pas tous les nombres d'une base de numération (Figure 34 et Figure 35), contrairement à la courbe de Helge van Koch (Nottale et Schneider, 1984). La perte initiale du 0 et du 2 signifie que seuls les nombres commençant par 1 sont nécessaires pour comptabiliser les branches.

De plus, à partir du nombre de niveaux, on peut connaître le nombre total de branches  $N$ .

$$N = 3^0 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^n$$

Cette suite converge. D'où

$$N = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$$

Bien entendu, on pouvait également le faire avec l'arbre possédant deux embranchements. Dans ce cas,  $N = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ .

### 6.3.4. Arbre et log-périodicité

Un arbre est une structure log-périodique par excellence, car il combine un cycle de longueurs avec un facteur de réduction. On obtient alors quelques formules très intéressantes pour étudier la morphologie d'une structure arborescente (Nottale *et alii*, 2000).

#### 6.3.4.1. Relations entre la longueur des branches et le niveau

Le nombre de branche  $N_n$  d'un niveau  $n$  vaut :

$$N_n = k^n$$

Autrement dit, le niveau correspond à

$$n = \frac{\ln N_n}{\ln k}$$

D'après la Figure 31, on définit  $X_n$  la position d'un nœud,  $L_n = X_{n+1} - X_n$  correspondant à la distance entre deux nœuds contigus et  $S_n = \sum_{k=0}^n X_k$  la longueur totale de  $X_0$  à  $X_n$ .

On définit le rapport  $g$  de la manière suivante :

$$g = \frac{X_{n+1} - X_n}{X_{n+2} - X_{n+1}} = \frac{L_n}{L_{n-1}}.$$

La longueur  $L_n$  de chacune des branches d'un même niveau  $n$  vaut :

$$L_n = \frac{1}{g^n} L_0$$

ce qui signifie que  $g$  vaut :

$$\ln g = \frac{\ln\left(\frac{L_0}{L_n}\right)}{\ln N_n} \times \ln k$$

c'est-à-dire

$$g = k^{\ln\left(\frac{L_0}{L_n}\right) / \ln N_n} = k^D \text{ où } D = 2$$

#### 6.3.4.2. Étude de la longueur d'un chemin - Longueur critique

La longueur d'un chemin amont-aval est appelée longueur totale  $S_n$ .

$$S_n = L_0 + L_1 + L_2 + \dots + L_{n-1} = L_0 \left(1 + \frac{1}{g} + \frac{1}{g^2} + \dots + \frac{1}{g^{n-1}}\right)$$

Cette somme est égale à  $L_0 \frac{\left(\frac{1}{g}\right)^n - 1}{\frac{1}{g} - 1} = L_0 \left(\frac{g}{g-1}\right) (1 - g^{-n})$ .

##### ■ Cas infini : la longueur critique $L_C$

A l'infini, le terme  $\left(\frac{1}{g}\right)^n$  tend vers 0.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{g}\right)^n = 0^+$$

La longueur totale converge donc à l'infini en une valeur appelée longueur critique  $L_C = X_C - X_0$ .

$$L_C = L_0 \left(\frac{g}{g-1}\right)$$

##### ■ Cas fini : la longueur totale $S_n$

Dans le cas fini, la longueur totale est donnée par l'équation suivante :

$$S_n = L_0 \left( \frac{g}{g-1} \right) (1 - g^{-n}) = L_C (1 - g^{-n})$$

or, comme  $L_C = X_C - X_0$  et  $L_C - S_n = X_C - X_n$ ,

$$X_C - X_n = g^{-n}(X_C - X_0)$$

c'est-à-dire

$$X_n = g^{-n}(X_0 - X_C) + X_C$$

ou encore

$$\frac{L_n - L_C}{L_0 - L_C} = g^{-n}$$

#### 6.3.4.3. Longueur totale d'une arborescence et nombre de branches

##### ■ Nombre total de branches

Le nombre total de branches d'un arbre déterministe fini est très simple à calculer.

$$N_{\text{TOT}_{A_n}} = \sum_{i=0}^n k^i = \frac{k^n - 1}{k - 1} \text{ avec } k \geq 2$$

Il faut remarquer que, dans le cas le plus simple où  $k = 2$ , le nombre total de branche vaut  $2^{n+1} - 1$ .

Il faut noter que dans le cas idéal où  $n$  tend vers l'infini, ce nombre tend également vers l'infini.

##### ■ Longueur totale de l'arborescence et longueur totale par niveau

La longueur totale de l'arborescence  $L_{\text{TOT}_{A_n}}$  correspond à la somme des longueurs par niveau.

$$L_{\text{TOT}_{A_n}} = L_{\text{TOT}_0} + L_{\text{TOT}_1} + \dots + L_{\text{TOT}_n}$$

On peut alors étudier la longueur totale par niveau en posant  $B_n$ , le nombre de branches par niveau (cf. l'étude de la courbe de Helge van Koch du chapitre 4).

$$L_{\text{TOT}_0} = L_0$$

$$L_{\text{TOT}_1} = B_1 L_1 = \frac{B_1}{g} L_0$$

$$L_{\text{TOT}_2} = B_2 L_2 = \frac{B_2}{g^2} L_0$$

...

$$L_{\text{TOT}_{n-1}} = B_{n-1} L_{n-1} = \frac{B_{n-1}}{g^{n-1}} L_0$$

Dès lors, la longueur totale de l'arborescence peut s'exprimer simplement.

$$L_{\text{TOT}_{A_n}} = L_0 + \frac{B_1}{g} L_0 + \frac{B_2}{g^2} L_0 + \dots + \frac{B_{n-1}}{g^{n-1}} L_0 = L_0 \left( 1 + \frac{B_1}{g} + \frac{B_2}{g^2} + \dots + \frac{B_{n-1}}{g^{n-1}} \right)$$

Il faut remarquer que si  $B = g$  alors  $L_0 = L_{\text{TOT}_1} = \dots = L_{\text{TOT}_{n-1}}$ . Autrement dit, la somme des longueurs par niveau est égale à la longueur du tronc  $L_0$ .

Dans le cas déterministe, le nombre de branches par niveau suit une relation exponentielle de base  $k$ . D'où,

$$L_{\text{TOT}_{A_n}} = L_0 \left( 1 + \frac{k}{g} + \frac{k^2}{g^2} + \dots + \frac{k^{n-1}}{g^{n-1}} \right) = L_0 \frac{\left( \frac{k}{g} \right)^n - 1}{\frac{k}{g} - 1}$$

On peut alors déterminer une longueur critique totale telle que :

$$L_{TOTc} = L_0 \left( \frac{g}{g-k} \right)$$

- Niveau, longueur totale par niveau et facteur d'échelle  $1/g$

La longueur totale par niveau permet de calculer le facteur d'échelle par niveau.

$$g_n = \left( L_0 \frac{B_n}{L_{TOT_n}} \right)^{\frac{1}{n}}$$

Cette formule d'estimer la valeur de  $g$  par la moyenne de toutes les valeurs  $g_n, \bar{g}$ .

À partir de là, on peut estimer la longueur critique d'une arborescence par  $\bar{L}_C$  telle que :

$$\bar{L}_C = L_0 \left( \frac{\bar{g}}{\bar{g}-1} \right)$$

### 6.3.5. Arbre et fractalité

La courbe de Helge van Koch sert de modèle de référence pour comprendre et étudier la fractalité d'un arbre.

Soit  $g > 1$ , alors la longueur d'une branche d'un niveau  $L_n = \frac{L_0}{g^n}$  et le nombre de branche de ce niveau  $N_n = k^n$ . Pour un arbre déterministe, cela signifie que la longueur totale d'un niveau  $n$  vaut :

$$L_{TOT_n} = N_n L_n = k^n \frac{L_0}{g^n}$$

Or, on sait que le nombre de branches  $k$  est lié au facteur d'échelle  $g$  par :  $k = g^{D_f}$ , d'où

$$L_{TOT_n} = L_0 g^{-n} g^{n D_f} = L_0 g^{-n} g^{n \frac{\ln k}{\ln g}} = L_0 \left( \frac{1}{g^n} \right)^{\frac{\ln k}{\ln g} - 1} \text{ avec une résolution } \varepsilon_n = g^n.$$

De plus,  $k = g^2$  où le 2 correspond à la dimension topologique. Autrement dit,  $D_f$  est une vraie dimension fractale puisqu'elle est définie à la limite de l'arbre (Mandelbrot, 1977). Cela signifie que, pour un arbre, la dimension fractale est égale à la dimension topologique, s'il se déploie dans le plan, sa dimension fractale vaut donc 2.

On peut alors estimer une fractalité locale telle que :

$$D_n = \frac{\ln k}{\ln g_n}$$

or  $k$  est inconnue. On peut alors utiliser  $B_n$  comme estimateur.

$$\bar{D}_n = \frac{\ln B_n}{\ln g_n}$$

## 6.4. Caractéristiques fractales et non fractales de l'arborescence d'un réseau hydrographique

Très tôt, les particularités de la géométrie des réseaux hydrographiques ont été perçues par Léonard de Vinci (1949) ou Cecil Murray (1927). Toutefois, ce fut Benoît Mandelbrot (1977 ; 1982) qui montra que cette géométrie appartenait à la géométrie fractale.

#### 6.4.1. La « loi » de Léonard de Vinci

Léonard de Vinci avait remarqué que « toutes les branches d'arbres, à quelque degré de leur hauteur qu'on le réunisse, sont égales à la grosseur du tronc. Toutes les ramifications des eaux, douées d'un mouvement égal, à chaque degré de leur longueur égalent la grosseur du fleuve, leur père » (*in Nottale et alii*, 2000, p. 185). De ce constat, Léonard de Vinci (1949) établit une « loi » unissant le rayon  $r$  d'un cours (la distance moyenne entre deux berges) et le nombre moyen d'embranchements  $k$  (en règle général, pour les cours d'eau, il y en a deux). Elle s'exprime de la manière suivante :

$$kr_{n+1}^2 = r_n^2$$

c'est-à-dire

$$k = \left( \frac{r_n}{r_{n+1}} \right)^2$$

ce qui correspond si  $k = 2$  et l'angle  $\alpha$  entre  $r_1$  et  $r_2$  vaut  $\frac{\pi}{2}$  au théorème de Pythagore.

À cette condition, si l'on pose une condition d'autosimilarité, une autre loi apparaît entre le rayon  $r$  d'un cours d'eau et la longueur du cours  $L$  (la distance entre deux confluences). Le rapport entre le rayon père et le rayon fils est alors constant ; il en va de même pour le rapport entre la longueur mère et la longueur fille. Ainsi, l'égalité suivante entre ces rapports devient évidente.

$$\frac{r_n}{r_{n+1}} = \frac{L_n}{L_{n+1}} = g$$

or

$$k = \left( \frac{r_n}{r_{n+1}} \right)^2$$

d'où la relation entre le nombre d'embranchements et la longueur d'un cours d'eau :

$$g^2 = k$$

Benoît Mandelbrot (1977 ; 1982) montra que l'exposant 2 était une dimension fractale d'un arbre déterministe. Ainsi, on retrouve d'une autre manière les formules précédentes. Cependant, l'arbre que constitue un réseau hydrographique n'est pas autosimilaire pour deux raisons : la première vient du fait que le nombre de branches par niveau ne suit pas systématiquement une loi puissance ; la seconde est que deux longueurs entre deux confluences ne possèdent pas forcément un facteur d'échelle (agrandissement ou réduction) constant. À travers différentes analyses appliquées sur le réseau hydrographique des Gardons, cette partie va essayer de mettre en lumière les caractéristiques fractales et non fractales d'une structure non autosimilaire.

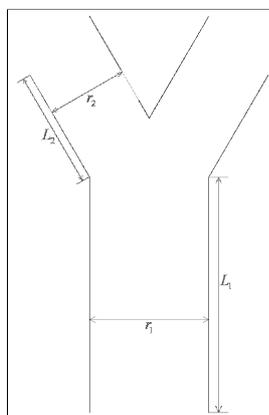


Figure 36. Rapport entre le rayon et la longueur des branches d'un arbre

#### 6.4.2. La loi de Cecil Murray

Pour Cecil D. Murray (1927), les branches de niveau  $n + 1$  ont plus de place pour le passage d'un fluide que la branche  $n$  qui les alimente. On appelle les rayons des deux branches de niveau  $n + 1$ ,  $d_1$  et  $d_2$  et le rayon de la branche mère  $n$ ,  $d_0$ . Pour lui, d'après la loi de Poiseuille, on peut écrire :

$$d_0^3 = d_1^3 + d_2^3$$

Autrement dit, les facteurs de la loi sont une base,  $k = 2$ , et une dimension fractale,  $D = 3$ . Le rapport d'échelle  $g$  vaut alors 1,260. Cette loi permet d'optimiser le flux dans un arbre par rapport à sa résistance (Murray, 1927 ; Mandelbrot, 1982 ; Bejan et Lorente, 2004). Cette valeur de  $g$  est donc fondamentale, si l'arborescence possède une base 2.

#### 6.4.3. Les méthodes de mise en arborescence du réseau

D'après le point précédent, les liens entre arborescence et fractalité sont étroits, mais il existe au moins deux façons de construire un arbre : la méthode ascendante que l'on appellera classification hiérarchique ascendante des confluences et la méthode descendante qui correspond à celle de Robert Elmer Horton. Toutes les deux permettent de mesurer des dimensions fractales « internes » au réseau hydrographique. Toutefois, avant de calculer ces dimensions, il est bon de calculer une dimension fractale « externe » *via* la méthode par comptage de boîtes carrées qui servira de référence. En effet, estimer la dimension fractale est ce qu'il y a de plus facile pour les arborescences non autosimilaires. Le nombre de branches  $k$  est souvent égal à 2 pour un réseau hydrographique. À partir de là, on peut déduire le facteur d'échelle  $g$ , et ainsi peut-être retrouver la formule fondamentale :

$$g^D = k.$$

##### 6.4.3.1. Le calcul d'une dimension fractale par comptage de boîtes carrées du réseau

Il faut commencer par estimer le paramètre le plus simple : la dimension fractale sur le RESEAU 1 et le RESEAU 2. La Figure 37 est une figure classique que l'on obtient lorsque l'on mesure la dimension fractale d'un réseau hydrographique par comptage de boîtes carrées (Rodriguez-Iturbe et Rinaldo, 1997 ; Fardin *et alii*, 2001). Toutefois, la plupart des auteurs n'ont pas compris la signification profonde de ce graphique. En effet, beaucoup l'ont interprété (Tarboton *et alii*, 1988 ; La Barbera et Rosso, 1989 ; Rosso et Bacchi, La Barbera, 1991 ; Garcia-Ruiz et Otálara, 1992) comme se partageant en deux dimensions fractales que l'on pouvait combiner (La Barbera et Rosso, 1989 ; Rosso *et alii*, 1991 ; Quadros Da Silveira, 2006). En réalité, la relativité d'échelle montre qu'il s'agit ici d'un régime fractal - non fractal à une transition (cf. chapitre 4). En effet, si l'on prend l'exemple de la Figure 37, le premier domaine possède une dimension fractale valant  $1,007 \pm 0,007$  c'est-à-dire  $D_F = 1$ , donc il s'agit de la dimension topologique de l'objet ; dans cette zone, il est non fractal. De ce fait, ce graphique montre qu'un objet « réel » n'est jamais totalement fractal : il l'est potentiellement (ici entre  $\ln \varepsilon = 6,4$  et  $\ln \varepsilon = 10,4$ ). La valeur qui met un terme au domaine non fractal et qui débute le domaine fractal (ici  $\ln \varepsilon = 6,4$ ), correspond à une échelle de coupure. Pour les modèles fractal - non fractal à une transition, en deçà de cette échelle, l'objet est fractal, au-delà, il ne l'est plus.

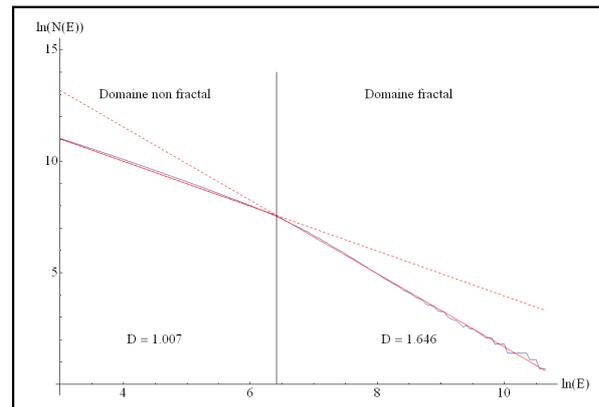


Figure 37. Calcul de la dimension fractale par comptage de boîtes carrées du RESEAU 1

$E$  : la résolution en mètre ;  $N(E)$  : le nombre de boîtes.

L'échelle de coupure entre la transition fractal - non fractal vaut 609 m.

L'étendue de l'objet est de 42 200 m.

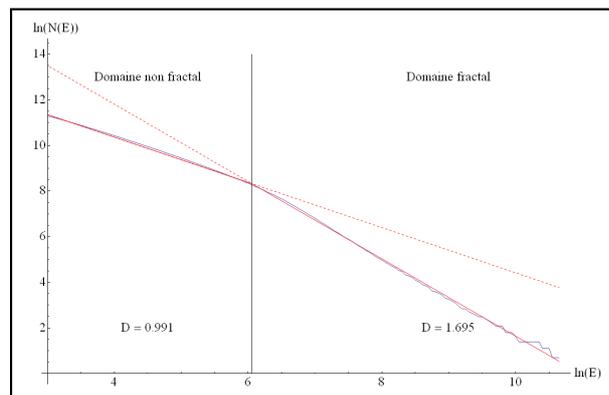


Figure 38. Calcul de la dimension fractale par comptage de boîtes carrées du RESEAU 2

$E$  : la résolution en mètre ;  $N(E)$  : le nombre de boîtes.

L'échelle de coupure entre la transition fractal - non fractal vaut 425 m.

L'étendue de l'objet est de 42 200 m.

Sur la Figure 37 et la Figure 38, les deux régimes apparaissent clairement et indiquent des valeurs très proches  $1,007 \pm 0,007$  et  $0,991 \pm 0,008$  pour le domaine non fractal, et  $1,646 \pm 0,010$  et  $1,695 \pm 0,010$  pour le domaine fractal. Ces résultats peuvent être surprenants, car on aurait pu penser que le RESEAU 2, de par sa plus grande précision, admettrait une structure fractale strictement invariante d'échelle, mais ce n'est pas le cas. On observe des dimensions fractales ayant des ordres de grandeurs comparables. La seule variable qui change est l'échelle de coupure : 609 m pour le RESEAU 1, et 425 m pour le RESEAU 2. Ces échelles sont donc fondamentales. En effet, elles peuvent s'interpréter comme une mesure de la qualité de l'information géographique contenue dans chacune des couches S.I.G. Ainsi, la multiplication par un facteur trois des drains entre le RESEAU 1 et le RESEAU 2 améliore l'information géographique, mais ne change rien à la structure en échelles observée.

De plus, chaque classement des branches du réseau hydrographique des Gardons permet le calcul d'une dimension fractale « interne ».

#### 6.4.3.2. La méthode hortonienne

La classification actuelle dite de Horton qui est en fait celle d'Arthur N. Stralher (1954a ; 1954b ; 1957) et de Stanley A. Schumm (1956), suit un ordre descendant. Les sources (ou lieux d'écoulement concentré initial) sont les points de départ ; elles sont numérotés 1. L'algorithme est le suivant : chaque fois que deux affluents de même ordre  $n$  se connectent leur confluent passera à l'ordre  $n + 1$ , mais si deux affluents d'ordre différent ( $n, m$  avec  $m > n$ ) se connectent alors leur confluent prendra l'ordre le plus élevé des affluents c'est-à-dire  $m$ . En règle générale, cette arborescence comporte peu de niveaux. C'est le cas du réseau des Gardons.

##### ■ Classification de Horton-Schumm-Strahler

En hydrologie, il existe déjà des indicateurs pour mesurer le rapport d'échelle  $1/g$ . On peut d'abord estimer un rapport de longueur ( $RL$ ) de Stanley Schumm (1956) repris par Arthur Stralher en 1957. Il correspond au rapport entre la moyenne des longueurs du niveau  $n + 1$  et la moyenne des longueurs du niveau  $n$ . Ensuite, le rapport de confluence ( $RC$ ) de Robert Elmer Horton (1945) est calculé comme étant le rapport entre le nombre de branches  $n$  et le nombre de branches  $n + 1$ .

$$RL_n = \frac{L_{TOT_n}}{B_n} \times \frac{B_{n+1}}{L_{TOT_{n+1}}}$$

$$RC_n = \frac{B_n}{B_{n+1}}$$

##### ■ Analyse de Horton et dimension fractale

L'étude approfondie des rapports  $R_L$  et  $R_C$  permet de calculer une dimension fractale « interne » au réseau hydrographique des Gardons.

##### ■ Étude du RESEAU 1

La Figure 39 montre une ordination de Horton à cinq ordres. Pour obtenir la dimension fractale, il suffit de s'aider de la Figure 40. Si on linéarise les données en passant en logarithme et que l'on met la longueur moyenne en fonction de l'effectif, la pente de cette droite donne une approximation de la dimension fractale. Autrement dit, l'effectif joue ici le rôle d'une résolution (Mandelbrot, 1977 ; Mandelbrot, 1982 ; La Barbara et Rosso, 1989 ; Garcia-Ruiz et Otálora, 1992 ; Prusinkiewicz et Hammel, 1993 ; Tarboton, 1996 ; Rodríguez-Iturbe et Rinaldo, 1997, p. 127 ; Sagar *et alii*, 1998 ; Dodds et Rothman, 1999 ; Dodds et Rothman, 2000).

$$N = N_0 \left( \frac{\langle L_0 \rangle}{\langle L \rangle} \right)^D$$

soit :

$$\ln N = \ln N_0 + D \ln \left( \frac{\langle L_0 \rangle}{\langle L \rangle} \right)$$

La pente locale vaut alors :

$$\Delta = \frac{\ln N_1 - \ln N_2}{\ln \langle L_1 \rangle - \ln \langle L_2 \rangle} = \frac{\ln \left( \frac{N_1}{N_2} \right)}{\ln \left( \frac{\langle L_1 \rangle}{\langle L_2 \rangle} \right)} = \frac{-\ln \left( \frac{N_2}{N_1} \right)}{\ln \left( \frac{\langle L_1 \rangle}{\langle L_2 \rangle} \right)} = - \frac{\ln R_C}{\ln R_L} = D$$

où  $R_L$  n'est autre que le rapport de longueur de Schumm  $R_L$  et  $R_C$  le rapport de confluence  $R_C$  de Horton. Ici,  $D_T$  vaut bien évidemment 1. Le *ratio*  $-\frac{\ln R_C}{\ln R_L}$  donne une approximation de la dimension fractale. Pour le réseau pérenne, sa valeur est de  $D_1 = 1,683 \pm 0,561$ .

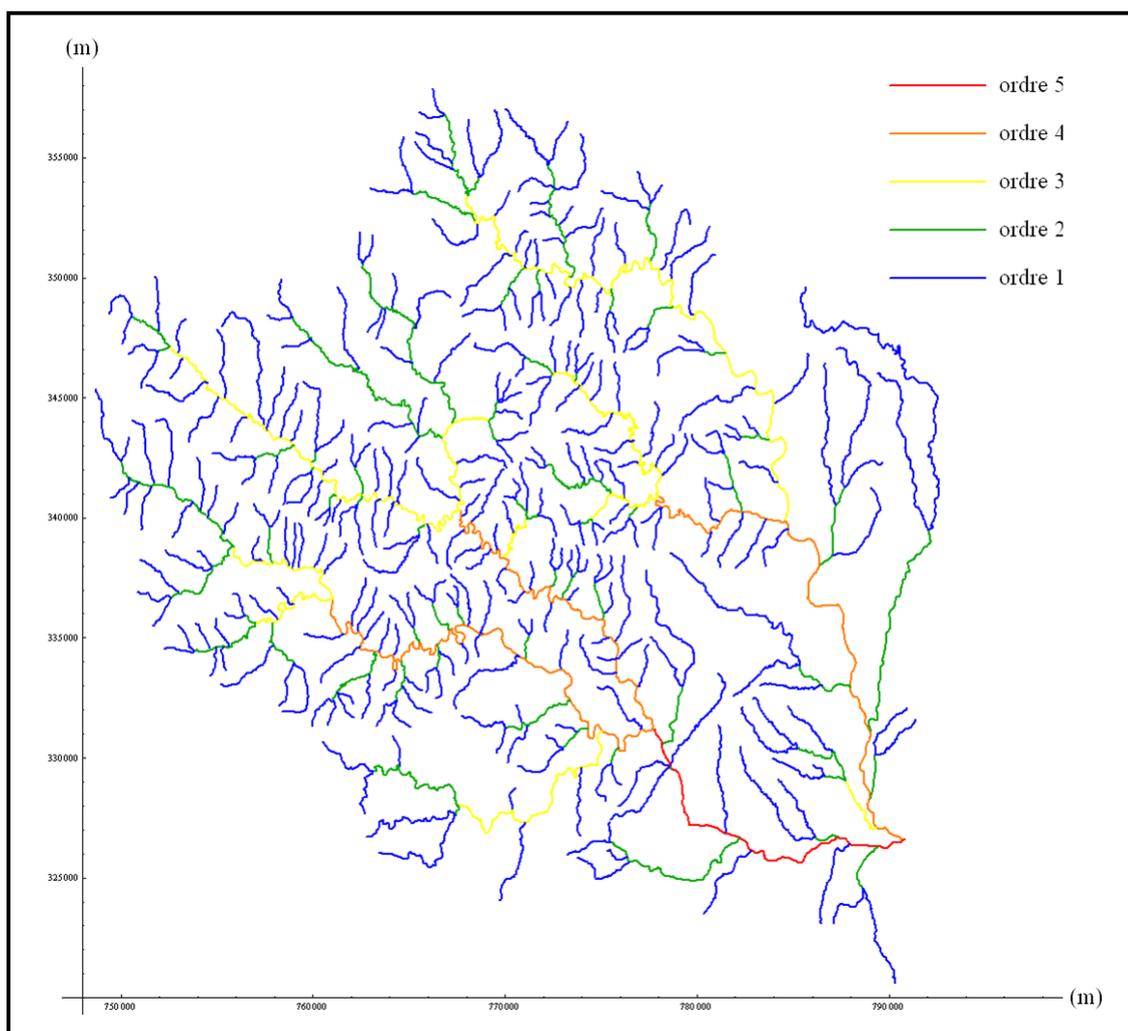


Figure 39. Classification de Horton appliquée aux Gardons

Ordre	Effectif	Longueur moyenne des drains de l'ordre (m)
1	308	2 002,43 ± 107,60
2	66	3 040,95 ± 447,70
3	10	14 684,20 ± 4 116,59
4	3	35 538,20 ± 10 362,22
5	1	12 746,40

Figure 40. Relation entre l'ordre, l'effectif et la longueur

#### ■ Étude du RESEAU 2

La Figure 41 montre une ordination de Horton à six ordres. Le simple fait d'avoir ajouté à peu près 1 000 branches n'a introduit qu'un seul ordre. On calcule la dimension fractale de la même manière (Figure 42) et on obtient une valeur de  $D_2 = 1,831 \pm 0,301$  pour le réseau « complet ».

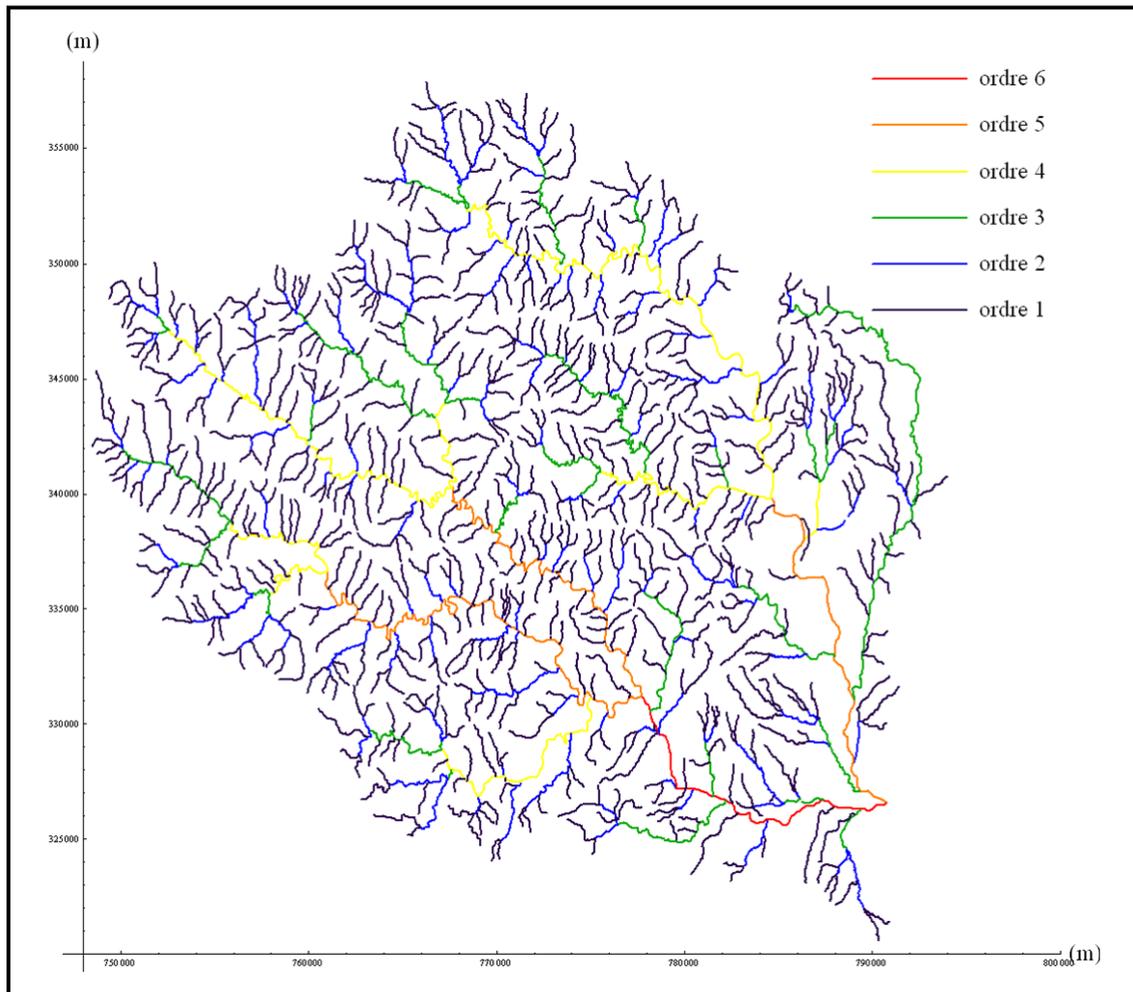


Figure 41. Classification de Horton appliquée aux Gardons

Ordre	Effectif	Longueur moyenne des drains de l'ordre (m)
1	661	1 343,95 ± 41,45
2	147	1 947,99 ± 137,47
3	32	5 165,49 ± 941,15
4	8	17 227,10 ± 5 368,14
5	3	27 777,10 ± 9 684,01
6	1	17 575,50

Figure 42. Relation entre l'ordre, l'effectif et la longueur

#### ■ Comparaison entre $D_1$ et $D_2$

Les valeurs de  $D_1$  et  $D_2$  possèdent des erreurs statistiques très élevées. Cela s'explique par le fait que les branches d'ordre 5 pour  $D_1$  et les branches d'ordre 6 pour  $D_2$  ne sont pas complètes, en terme de longueur, car la branche s'étend au-delà du Pont de Ners. Le plus simple est de les éliminer de la distribution. Ce faisant, l'amélioration des écarts-types est notable : pour  $D_1 = 1,492 \pm 0,199$  et  $D_2 = 1,620 \pm 0,166$ . Ces nouvelles valeurs pour  $D_1$  et pour  $D_2$  sont compatibles.

- Améliorer la qualité d'une mesure de la dimension fractale

Pour obtenir l'amélioration de la qualité d'une mesure, il suffit d'opérer une série de mesures indépendantes, c'est-à-dire des mesures d'un objet effectuées par différentes méthodes sur la même représentation ou sur différentes représentations par la même méthode. Ainsi, pour comparer les valeurs obtenues par la méthode de Horton-Schumm-Strahler, la méthode de comptage de boîtes carrées a été retenue.

	Dimension fractale	Erreur
RESEAU 1	1,646	0,010
RESEAU 2	1,695	0,010

Figure 43. Tableau de mesures des dimensions fractales par comptage de boîtes carrées pour les deux représentations du réseau

La Figure 43 présente des résultats nettement plus précis que ceux obtenus par la méthode de Horton-Schumm-Strahler. Ainsi, on peut comparer les différentes valeurs de mesures de la dimension fractale obtenues.

	Dimension fractale	Erreur
Horton	1,492	0,199
Comptage de boîtes	1,646	0,010

Figure 44. Tableau de comparaison entre les mesures du RESEAU 1

	Dimension fractale	Erreur
Horton	1,620	0,166
Comptage de boîtes	1,695	0,010

Figure 45. Tableau de comparaison entre les mesures du RESEAU 2

La Figure 44 et la Figure 45 montrent que les résultats obtenus par la méthode de Horton-Schumm-Strahler et celle par comptage de boîtes carrées sont compatibles. Toutefois, la méthode par comptage de boîtes carrées reste largement plus précise dans l'estimation de la dimension fractale du réseau hydrographique des Gardons.

- Comparaison de toutes les mesures

De toutes ces mesures, on peut en déduire que, d'une part, la méthode de Horton-Schumm-Strahler est moins précise que la méthode de comptage de boîtes carrées (Figure 44 et Figure 45), et que, d'autre part, la comparaison des valeurs des deux calculs obtenues sur le RESEAU 1 et sur le RESEAU 2 montrent que le réseau hydrographique des Gardons a une structure en échelle qui est invariante puisqu'en ajoutant des branches la dimension fractale ne se transforme pas.

Ainsi, dans une approche multi-échelle d'un réseau hydrographique, il faut comparer la dimension fractale par comptage de boîtes carrées et la dimension fractale définie par les lois de Horton-Schumm-Strahler.

#### 6.4.3.3. La classification hiérarchique ascendante des confluences (C.H.A.C.)

La classification hiérarchique ascendante des confluences (C.H.A.C.) est construite d'une manière très simple : à chaque confluence, une nouvelle branche apparaît. Ainsi, le nombre de niveaux est plus élevé que dans la classification de Robert Elmer Horton. On compte 63 niveaux pour le RESEAU 1 (Figure 46) et 93 niveaux pour le RESEAU 2 (Figure 47). La C.H.A.C. permet de faire des mesures sur un effectif de branches plus grand, ce qui fait que la construction d'indices locaux permettant d'étudier la géométrie du réseau hydrographique est meilleure. Le premier indice permet d'étudier le facteur d'échelle entre la longueur d'une branche le long de celle-ci  $LC$  et la distance à vol d'oiseau entre les deux extrémités de la branche (sources ou confluences)  $VO$ .

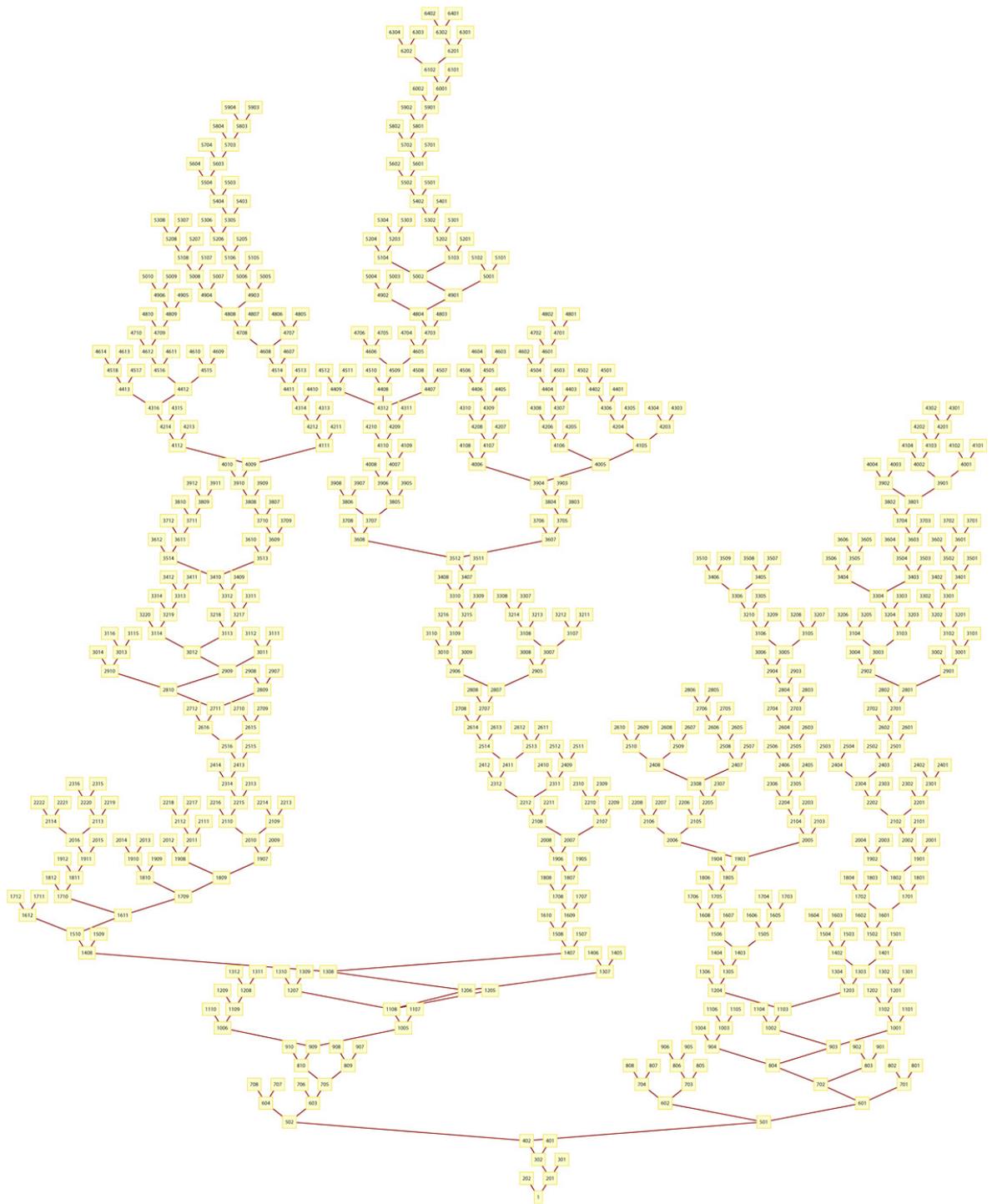


Figure 46. Arbre du RESEAU 1

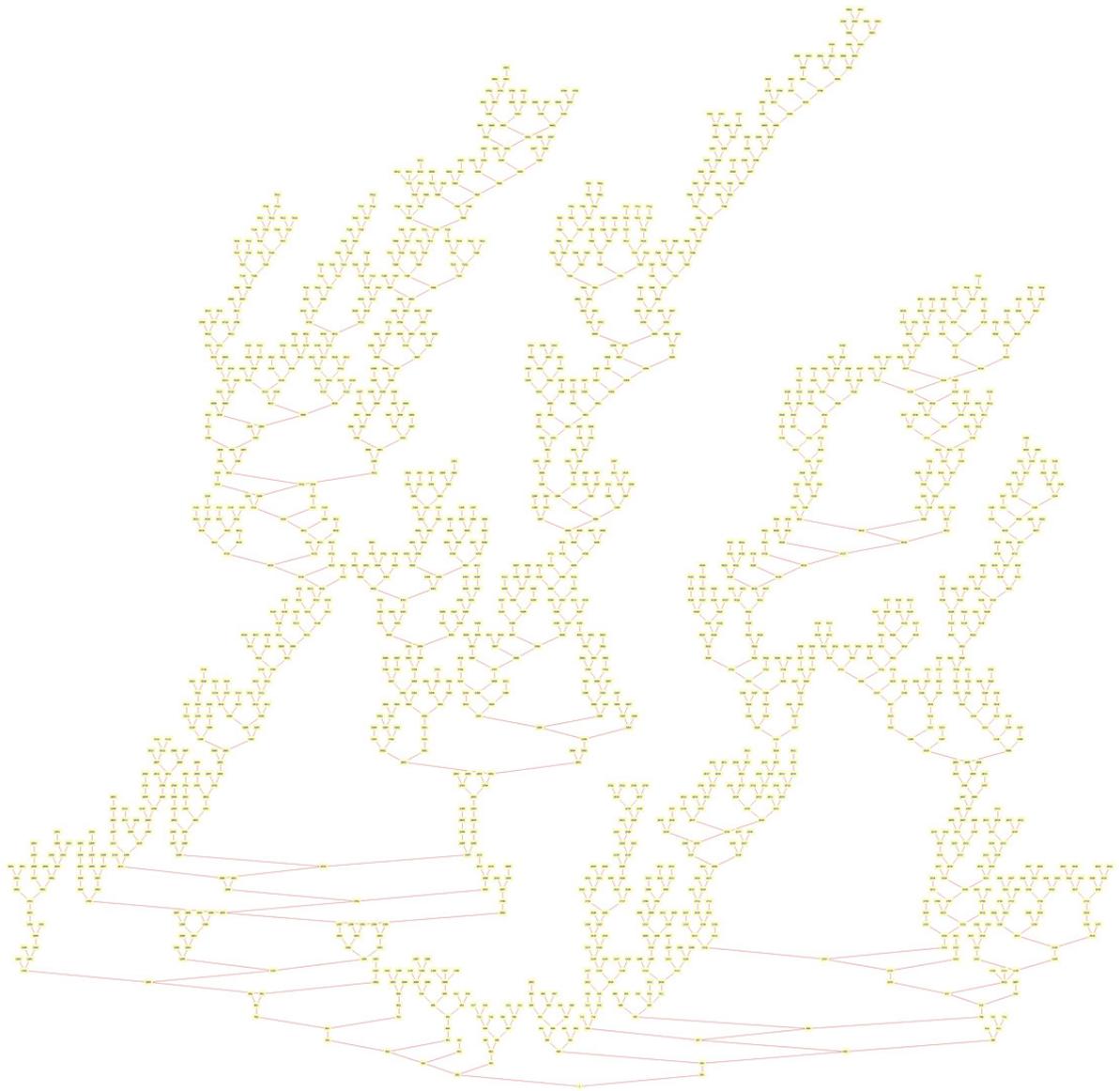


Figure 47. Arbre du RESEAU 2

#### ■ Calcul de la dimension fractale « interne » du réseau

La méthode de calcul de la dimension fractale « interne » de la C.H.A.C. est identique à celle de Robert Elmer Horton. On calcule des  $RL$  et des  $RC$ . La mise en relation des deux donne un ajustement linéaire dont la pente correspond à la dimension fractale. Pour le RESEAU 1, la valeur obtenue est  $1,584 \pm 0,125$ . Pour le RESEAU 2, la valeur obtenue est  $1,469 \pm 0,122$ . Les deux mesures sont compatibles. On retrouve une nouvelle fois une valeur de la dimension fractale autour de 1,6, mais ces résultats sont toujours moins précis que la dimension fractale par comptage de boîtes carrées.

■ Le rapport  $LC/VO$

Le rapport  $LC/VO$  correspond à un indice de tortuosité (Lanco Bertrand, 2005) ; dans la littérature de la géomorphologie, on dira plutôt indice de sinuosité. Il est possible d'en faire une statistique (Figure 48). On constate que, pour le RESEAU 1 ou le RESEAU 2, les distributions sont normales. On constate qu'une constante apparaît : le facteur d'échelle moyen que l'on peut appliquer aux branches du réseau hydrographique des Gardons est autour de 1,5 quelle que soit la densité du réseau choisie. Autrement dit, le passage du RESEAU 1 au RESEAU 2 ne change pas cette valeur. Toutefois, l'écart-type de la distribution a été divisé par 2, ce qui est considérable. Ce facteur d'échelle constant permet de rendre hautement significatif l'écart-type à la moyenne (Figure 49). Il faut rappeler que l'écart quadratique à la moyenne  $\sigma_{(X)}$  est le rapport entre l'écart-type de la distribution observée  $\sigma$  et la racine carrée de l'effectif  $n$  de la distribution.

$$\sigma_{(X)} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

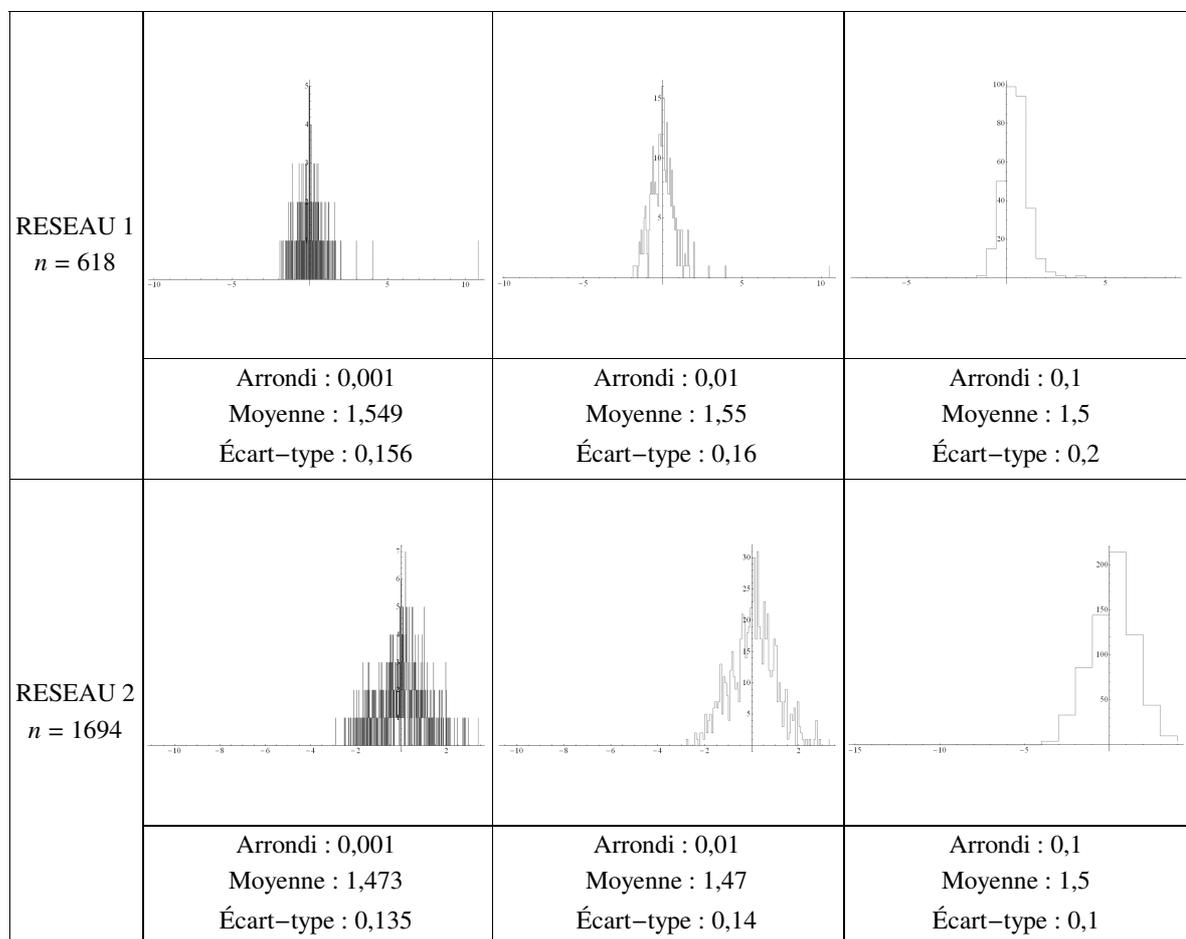


Figure 48. Distribution de probabilité du rapport  $LC/VO$

En abscisse, la valeur a été centrée et réduite. En ordonnée, on trouve l'effectif des valeurs observées.

$n$	Écart-type de la distribution	Moyenne du facteur d'échelle	Erreur sur la moyenne
618	0,156	1,549	0,006
1 694	0,135	1,473	0,003

Figure 49. Estimation du facteur d'échelle  $LC/VO$ 

Dès lors, il serait intéressant de voir si cette constante est stable. Pour ce, il faut construire un autre indice qui variera en fonction du drain étudié.

- La variation du rapport  $LC/VO$  de confluence en confluence

Lorsque l'on réalise le rapport  $LC/VO$  sur les branches, est-il aussi pertinent si on l'applique à des branches combinées ? Pour le vérifier, deux points de départ sont possibles : le point servant d'exutoire (Pont de Ners) et les points représentant les sources.

$$\frac{LC_k}{VO_k} = \frac{\sum_{i=1}^k LC_i}{VO_{\sum_{i=1}^k LC_i}} \text{ avec } k = \{1, 2, \dots, n\}$$

où  $k$  représente le niveau intermédiaire.

- Variation du rapport  $LC/VO$  de confluence en confluence du Pont de Ners aux sources

Quel que soit le réseau, quelle que soit la source, si l'on reporte sur un graphique, la distance au Pont de Ners et le rapport intermédiaire  $LC/VO$  obtenu, on s'aperçoit que le rapport converge rapidement (vers 5 km) vers la valeur 1,5 (annexe 20-2).

- Variation du rapport  $LC/VO$  de confluence en confluence des sources au Pont de Ners

Quel que soit le réseau, quelle que soit la source, si l'on reporte sur un graphique, la distance à la source et le rapport intermédiaire  $LC/VO$  obtenu, on s'aperçoit que le rapport converge moins rapidement que pour le cas précédent (vers 10 km) vers la valeur 1,5 (annexe 20-2). Toutefois, les courbes montrent des rapports qui peuvent être très importants autour de 3,4, voire 5,6. Autrement dit, le facteur d'échelle organisant le réseau est plus stable si on l'utilise comme point de référence l'exutoire du réseau. Cela montre que la C.H.A.C. présente une classification plus pertinente que celle de Robert Elmer Horton.

Pour conclure, l'étude de ces indices, on peut également effectuer à l'instar du relevé de talweg, un relevé du rapport  $LC/VO$  par branche et par chemin parcouru (annexe 20-2).

- Les relevés  $LC/VO$

Il est possible de réaliser des relevés de  $LC/VO$  analogiques à des relevés de talwegs (annexe 20-2). Pour la plupart des graphiques qu'on analyse le RESEAU 1 ou le RESEAU 2, on observe un pic au centre du graphique (Figure 57 ou Figure 59 par exemple). Ce pic correspond morphologiquement à la zone centrale (Figure 30) qui possède beaucoup de méandres.

Ainsi, l'indice de tortuosité est une estimation du rapport d'échelle  $g$  très précise. En effet, les analyses précédentes ont montré que le rapport  $LC/VO$  était stable quel que soit la qualité des informations du réseau hydrographiques. Il correspond au facteur d'échelle  $g$  recherché (Tokunaga, 1994 ; Veltri *et alii*, 1996). De même, la dimension fractale est invariable. Si on arrondit le facteur d'échelle à  $\bar{g} = 1,5$  et la dimension fractale à  $\bar{D} = 1,7$  alors la relation fondamentale de Léonard de Vinci, généralisée par Benoît Mandelbrot, donne :

$$\bar{g}^{\bar{D}} = 1,5^{1,7} \approx 2,0 \approx k$$

Cette relation est donc vérifiée pour une arborescence non autosimilaire. À cela, il faut ajouter que cette valeur de 1,7 a été trouvée de manière indépendante lors d'une étude du relief sous-jacent au réseau hydrographique des Gardons (Nottale *et alii*, 2009 ; 2010). Qu'en est-il de la log-périodicité ?

- Les branches, la log-périodicité et la dimension fractale

Une arborescence déterministe et autosimilaire peut se caractériser par une log-périodicité interne. Qu'en est-il des fractales non autosimilaires ? Pour rendre intelligible cette sous-partie, une comparaison systématique sera menée entre ce qui est observé et ce qui est connu des fractales déterministes.

- Étude statistique niveau - nombre de noeuds

L'approche classique consiste à mettre en relation les niveaux observés et le nombre de branches. Dans ce cas des réseaux hydrographiques, les branches correspondent à la liaison topologique entre deux nœuds. Un nœud peut être soit une confluence, soit une source. Dans le cas d'une structure fractale strictement autosimilaire, le nombre de branches croît à l'infini (Figure 50), tandis que dans le cas d'une arborescence réelle, le nombre de branches est fini (Figure 51). Aussi, il croît et décroît en suivant un modèle parabolique (Figure 51).

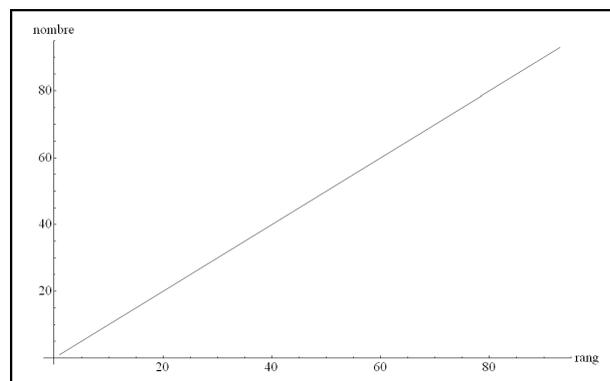


Figure 50. Arborescence : niveaux et branches dans le cas de structure auto-similaire

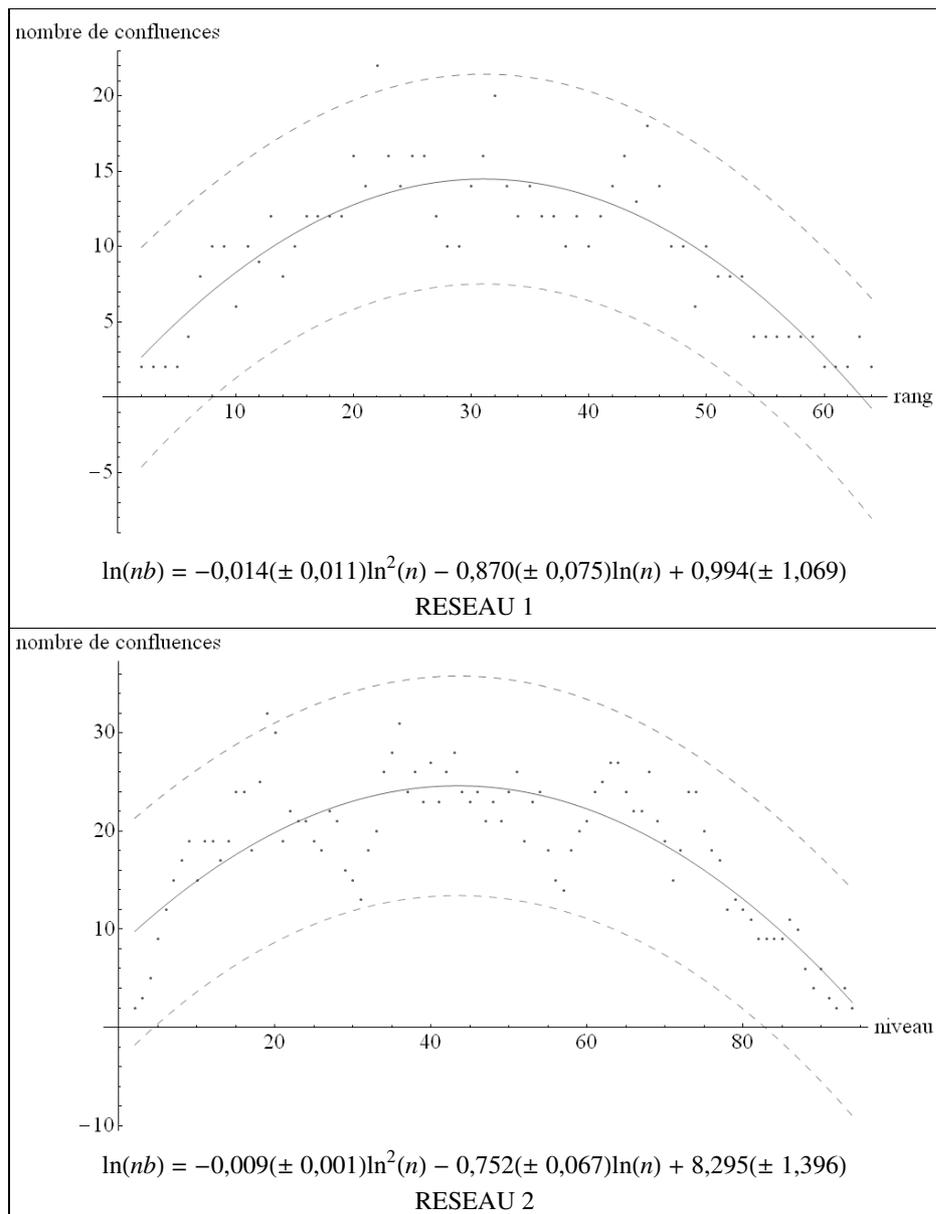


Figure 51. Arborescence : modèle parabolique observé

$n$  : niveau ;  $nb$  : nombre de branches

#### ■ Étude statistique des longueurs des branches

Précédemment, une relation entre les niveaux et leur nombre de branches a été trouvée. Cette relation renvoie à la structure topologique de l'arbre. Une autre étude naturelle, plus géométrique, est la distribution de probabilité des longueurs des branches. Pour le RESEAU 1, la moyenne vaut  $1\,778,37 \pm 61,23$  m tandis que pour le RESEAU 2, elle vaut  $931,30 \pm 17,33$  m. On remarque qu'entre les deux valeurs, il existe un facteur trois. Une nouvelle fois, on retrouve l'amélioration qualitative du RESEAU 2 par rapport au RESEAU 1.

Les distributions de probabilité observées ressemblent à une courbe de Gauss tronquée (Figure 52 et Figure 53).

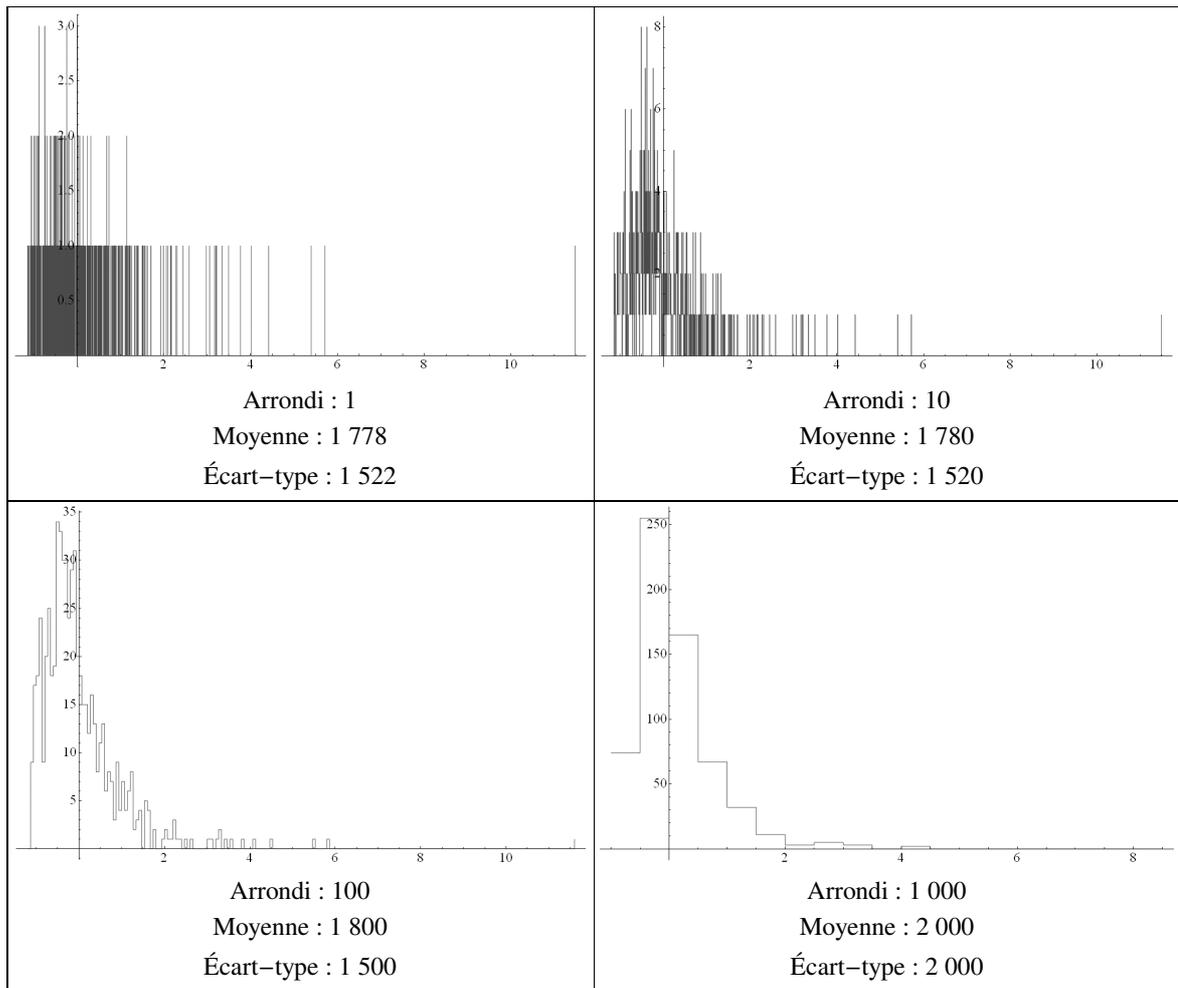


Figure 52. Statistique des longueurs des branches du RESEAU 1 ( $n = 618$ )

En abscisse, la valeur a été centrée et réduite. En ordonnée, on trouve l'effectif des valeurs observées.

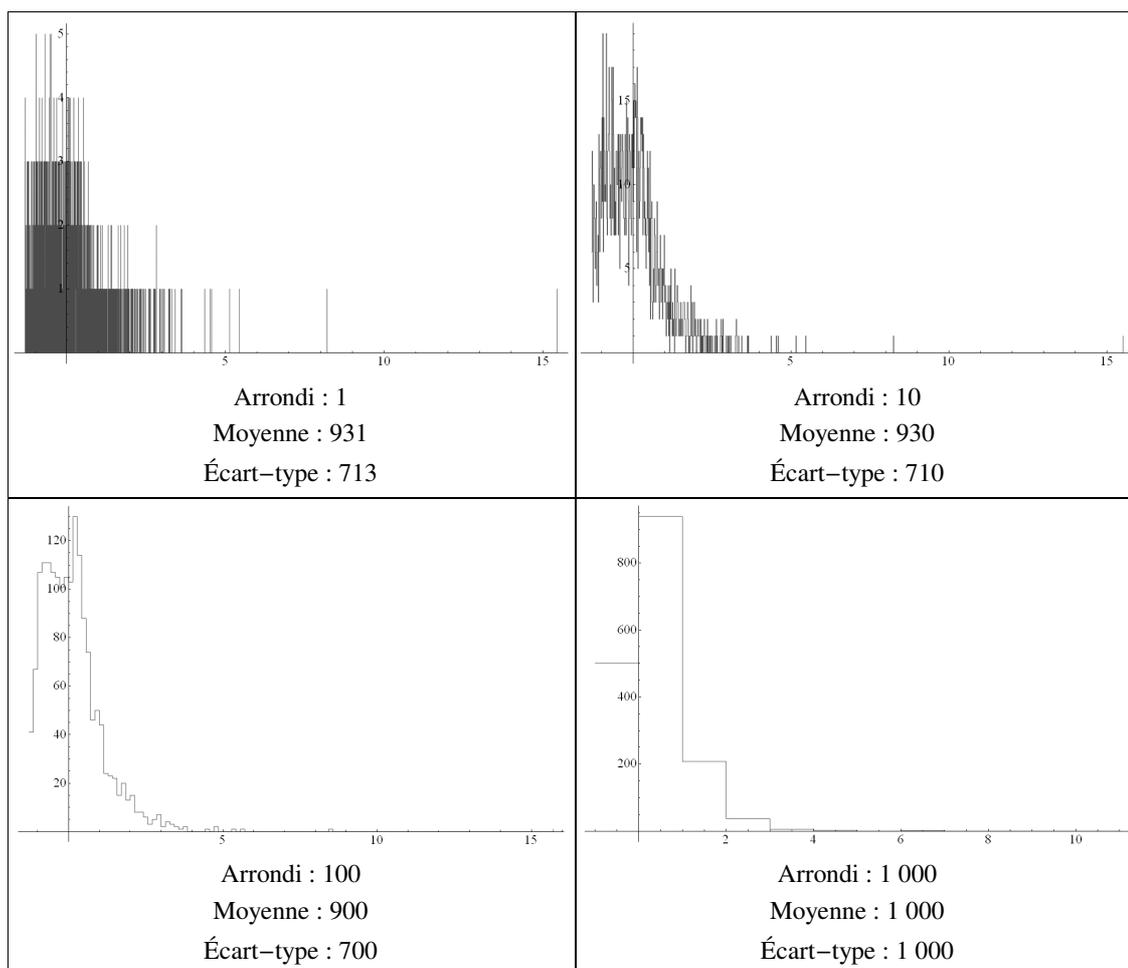


Figure 53. Statistique des longueurs des branches du RESEAU 2 ( $n = 1\,694$ )

En abscisse, la valeur a été centrée et réduite. En ordonnée, on trouve l'effectif des valeurs observées.

#### ■ Log-périodicité des branches

De toutes ces analyses, il est difficile d'établir formellement la log-périodicité du réseau hydrographique des Gardons. Quelques indices comme l'existence d'un facteur d'échelle constant et une dimension fractale constante laissent transparaître son existence, du moins en moyenne. Toutefois, ce n'est qu'une spéculation qu'il faudra vérifier.

#### ■ L'irrégularité et la fractalité

Le réseau hydrographique des Gardons est fractal. Plusieurs méthodes l'ont prouvé, mais qu'en est-il de ces branches d'une part et de ces chemins d'autre part ?

#### ■ Calcul d'une dimension fractale par branche

Il est possible de calculer une « dimension fractale locale » par la méthode de comptage de boîtes carrées pour chacune des branches (annexe 20-2). Ce calcul a été effectué à partir des points. Pour éviter la mesure d'une dimension fractale d'un nuage de points, il faut définir une échelle d'arrêt minimale et une échelle d'arrêt maximale. L'échelle d'arrêt minimale est la plus petite distance à vol d'oiseau entre deux points qui définissent une portion de la branche mesurée. L'échelle d'arrêt maximale correspond à la distance à vol d'oiseau entre le premier point de la branche et le dernier point de la branche. Cette méthode permet de « tromper » l'ordinateur afin qu'il mesure bien la dimension fractale d'une branche, et non des points qui la composent.

Sans regarder les valeurs numériques des dimensions fractales, une typologie des graphiques obtenus peut être dressée. La première catégorie concerne les courbes comme celle de la branche n°1403-RESEAU 1 (Figure 54). La gamme d'échelle est peu étendue :  $\exp(2) \approx 7$  m. Autrement dit, il est impossible de prétendre que la pente obtenue dans un espace bi logarithmique donne effectivement une dimension fractale. La seconde catégorie est caractérisée par des courbes comme celle de la branche n°401-RESEAU 1 (Figure 55), où la gamme d'échelle est un peu plus grande :  $\exp(5) \approx 148$  m. La troisième catégorie, plus rare, s'applique à des courbes comme celle de la branche n°803-RESEAU 1 (Figure 56) où la gamme d'échelle commence à être plus importante :  $\exp(6) \approx 403$  m, mais pas suffisante pour établir de manière certaine la dimension fractale, puisqu'il faudrait idéalement posséder une gamme d'échelle minimale de  $10^4$ - $10^5$  du fait que, pour appréhender les transitions, il faut une longueur minimale de 50 unités de mesure. Autrement dit, si on veut percevoir deux transitions, qui correspond au cas le plus courant, il faut nécessairement  $50 \times 50 \times 50$  unités de mesure, soit environ  $10^5$ . Toutefois, on supposera que les valeurs obtenues représentent effectivement des dimensions fractales locales.

Si l'on dresse la statistique des dimensions fractales locales, on s'aperçoit que les valeurs sont centrées autour de la moyenne, c'est-à-dire  $1,01 \pm 0,02$  pour le RESEAU 1 et  $1,00 \pm 0,02$  pour le RESEAU 2. Cette valeur hautement significative montre une fois de plus que l'irrégularité d'une structure ne suffit pas pour caractériser une fractale. Ici, chaque branche est caractérisée par une non fractalité.

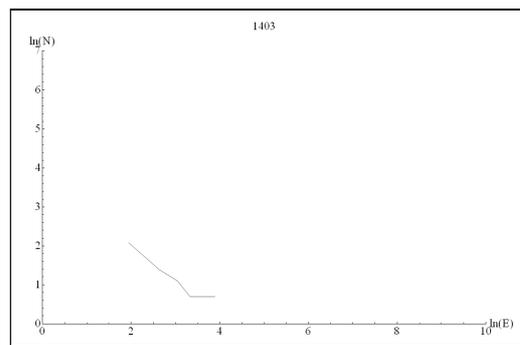


Figure 54. Exemple d'un graphique bi logarithmique où la gamme d'échelle est courte

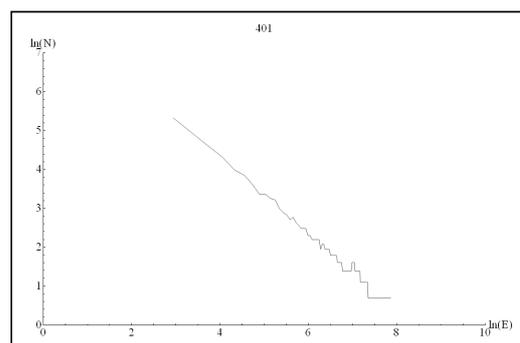


Figure 55. Exemple d'un graphique bi logarithmique où la gamme d'échelle est moyenne

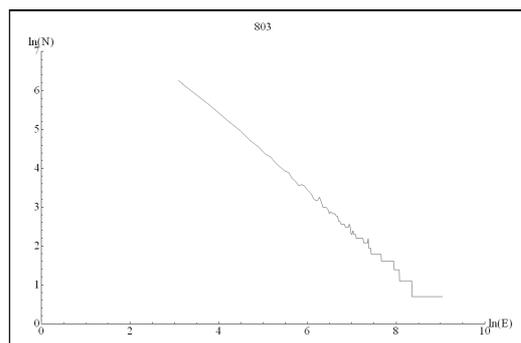


Figure 56. Exemple d'un graphique bi logarithmique où la gamme d'échelle est correcte

#### ■ Calcul d'une dimension fractale par chemin

En suivant la même méthode que le paragraphe précédent, il est possible de calculer une dimension fractale par comptage de boîtes carrées de l'ensemble du parcours entre une source et le point d'exutoire (Pont de Ners). On pourrait supposer qu'avec des longueurs nettement supérieures à celle des branches, il existe une dimension fractale non entière au niveau des chemins. La distribution statistique des dimensions fractales obtenue sur les chemins est en réalité centrée autour d'une moyenne de  $1,02 \pm 0,03$  pour le RESEAU 1 et  $1,01 \pm 0,02$  pour le RESEAU 2 (annexe 20-2). Autrement dit, comme les branches, la structure des chemins est non fractale. Une nouvelle fois, l'irrégularité apparente d'une structure ne suffit pas à définir une fractale. Les chemins ont un tracé caractérisé par leur non fractalité.

Cela montre d'une part qu'une structure est à la fois fractale et non fractale. Tout objet géographique porte ces deux natures. La fractalité doit être comprise comme un potentiel. Tout objet géographique est potentiellement fractal. Dans le cas d'un réseau hydrographique, toute l'arborescence de ce réseau est fractale, mais chaque branche ou chemin, ne l'est pas individuellement. L'explication de cette non fractalité est double. D'abord, cela vient peut-être simplement de la structure au niveau des branches et des chemins qui ne porte pas assez de gamme d'échelles pour faire apparaître une relation fractale. Toutefois, cela peut simplement signifier qu'un cours d'eau pris indépendamment du réseau hydrographique auquel il appartient, est un objet géographique qui se déploie dans une gamme d'échelles non fractales (Figure 37 et Figure 38). Tout cela permet d'insister sur le fait qu'une fractale articule plusieurs niveaux, mais ceux-ci n'apparaissent pas forcément dans la structure extérieurement ; il faut nécessairement un zoom pour les définir.

#### ■ Relevé de dimension fractale locale

Tout comme il a été possible d'effectuer un relevé *LC/VO* par rapport à la distance au Pont de Ners, il est possible de réaliser un relevé de la dimension fractale locale par rapport à la distance du Pont de Ners (annexe 20-2). Si on prend, par exemple, le drain le plus long soit le 6401-RESEAU 1 et le 9402-RESEAU 2, on se rend compte que les relevés du rapport *LC/VO* et de la dimension fractale varient exactement de la même façon : les distributions sont identiques. Les dimensions fractales étant très proches des dimensions topologiques de chacune des branches, cette correspondance entre les deux relevés permettent d'utiliser le relevé du rapport *LC/VO* à la place de celui de la dimension fractale locale et *vice versa*.

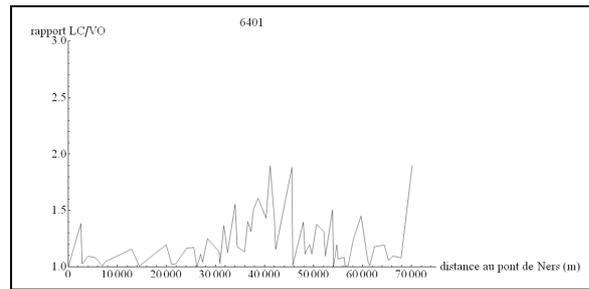


Figure 57. Rapport  $LC/VO$  du chemin de la branche 6401-RESEAU 1 à l'exutoire

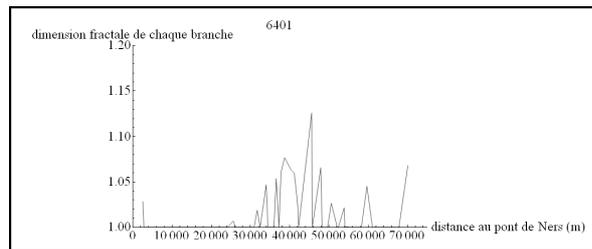


Figure 58. Relevé de la dimension fractale par branche du chemin de la branche 6401-RESEAU 1 à l'exutoire

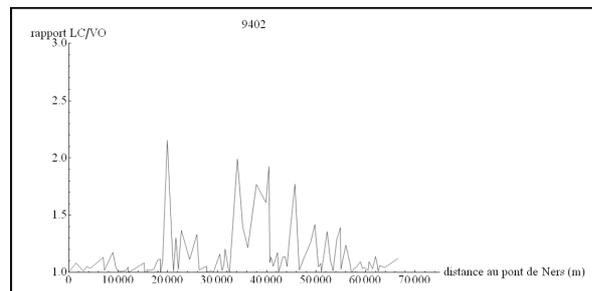


Figure 59. Rapport  $LC/VO$  du chemin de la branche 9402-RESEAU 2 à l'exutoire

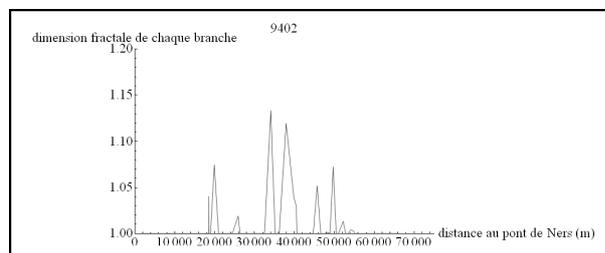


Figure 60. Relevé de la dimension fractale par branche du chemin de la branche 9402-RESEAU 2 à l'exutoire

Cette correspondance entre les pics observés sur le relevé  $LC/VO$  et ceux du relevé de la dimension branche se démontre facilement.

Soient le rapport d'échelle  $g = \frac{p}{q}$  et la dimension fractale  $D = \frac{\ln p}{\ln q}$ , si  $q$  est constant alors  $g = q^{D-1}$ . On peut alors étudier les variations de  $g$ , notées  $\delta g$  et celles de  $D$ , notées  $\delta D$ .

$$\begin{cases} \delta g = g - g_0 \\ \delta D = D - D_0 \end{cases}$$

L'équation  $g = q^{D-1}$  devient :

$$\ln g = \ln \left( g_0 \left( 1 + \frac{\delta g}{g_0} \right) \right) = (D_0 + \delta D - 1) \ln q$$

$$\Rightarrow \ln g_0 + \ln \left( 1 + \frac{\delta g}{g_0} \right) = (D_0 + \delta D - 1) \ln q$$

$$\Rightarrow \frac{\ln g_0}{\ln q} + \frac{\ln \left( 1 + \frac{\delta g}{g_0} \right)}{\ln q} = D_0 + \delta D - 1$$

$$\Rightarrow \frac{\ln \left( \frac{p_0}{q} \right)}{\ln q} + \frac{\ln \left( 1 + \frac{\delta g}{g_0} \right)}{\ln q} = D_0 + \delta D - 1$$

$$\Rightarrow \frac{\ln p_0 - \ln q}{\ln q} + \frac{\ln \left( 1 + \frac{\delta g}{g_0} \right)}{\ln q} = D_0 + \delta D - 1$$

$$\Rightarrow D_0 - 1 + D + \frac{\ln \left( 1 + \frac{\delta g}{g_0} \right)}{\ln q} = D_0 + \delta D - 1$$

$$\Rightarrow \ln \left( 1 + \frac{\delta g}{g_0} \right) = \delta D \ln q$$

$$\text{or, } \ln \left( 1 + \frac{\delta g}{g_0} \right) \text{ a pour développement limité du premier ordre : } \frac{\delta g}{g_0}.$$

$$\Rightarrow \frac{\delta g}{g_0} = \delta D \ln q$$

$$\Rightarrow \delta g = (g_0 \ln q) \delta D$$

Désormais, si l'on prend deux rapports d'échelle ayant deux dimensions fractales différentes, on a alors :

$$\left. \begin{aligned} \delta g_1 &= (g_0 \ln q) \delta D_1 \\ \delta g_2 &= (g_0 \ln q) \delta D_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\delta g_1}{\delta g_2} = \frac{\delta D_1}{\delta D_2}$$

Autrement dit, on peut effectivement se servir du relevé *LC/VO* pour caractériser celui des dimensions fractales.

Ces relevés sont fondamentaux. D'après Cecil D. Murray (1927), si  $\frac{LC}{VO} = 2^{1/3} \approx 1,260$  alors le réseau dans le cas d'un embranchement à base 2 est optimal par rapport à la résistance au flux. La Figure 57 et la Figure 59 permettent de visualiser localement les branches où le rapport dépasse largement 1,260. L'identification de ces branches est fondamentale pour une meilleure prévention des risques d'inondation. Plus le rapport est élevé, plus le risque d'inondation est important en cas de forte pluie. De plus, si l'établissement des rapports est impossible ; il est possible d'obtenir une idée de ces variations grâce à la dimension fractale locale.

- Fractalité du réseau, irrégularité et branches

La non fractalité des branches et des chemins est un point très important. En effet, cela montre qu'il ne faut pas voir des fractales partout. Elle démontre que l'irrégularité seule ne suffit pas pour caractériser une fractale, comme cela est si souvent écrit. Elle vérifie également qu'un arbre n'est fractal qu'à sa limite.

Ainsi, un réseau hydrographique est caractérisé par trois valeurs : un facteur d'échelle  $g$ , une dimension fractale  $D$  et un embranchement élémentaire  $k$  qui semble être constant quel que soit le réseau étudié. De plus, l'étude du réseau hydrographique des Gardons *via* deux arborescences complémentaires a permis de montrer que la fractalité dans ce cas n'était définie qu'à la limite de celles-ci. Autrement dit, un arbre est fractal, mais chacune de ses branches et chacun de ses chemins (bas en haut ; haut en bas) ne le sont pas. Ceci prouve que l'irrégularité à elle seule ne suffit pas pour définir une fractale. C'est une condition nécessaire mais pas suffisante. Ce qui caractérise une fractale est bien sa structure multi-échelle, c'est-à-dire des structures (irrégulières) dans les structures (Figure 9). Dans ce cas, le nombre d'échelles n'est pas suffisant.

