4

Structures fractales en géographie

Précédemment, le concept de « fractal » fut abondamment employé. Ce chapitre a pour objectif de dégager quelques caractéristiques mathématiques afin de définir ce concept et l'articuler avec la théorie de la relativité d'échelle.

4.1. Position du problème

Dès le début de la Nouvelle géographie en France, une approche fondamentale mise en œuvre fut l'analyse multi-scalaire (Lacoste, 1976), c'est-à-dire plus exactement une description empirique et intuitive des structures fractales présentes dans l'espace géographique. Celles-ci sont nombreuses, ne serait-ce que par l'existence même des cartes. C'est ce que certains ont appelé la généralisation cartographique (Eckert, 1921 ; Cuénin, 1972 ; Béguin et Pumain, 1994) qui n'est autre que l'expression littéraire d'une géométrie extrêmement générale appelée : géométrie fractale (Mandelbrot, 1975).

Le terme « fractal » vient de l'adjectif latin *fractus* (fracture) et du verbe *frangere* (briser). Étymologiquement, « fractal » veut donc dire fraction et/ou fracture. Autrement dit, on peut prétendre en première définition qu'elle permet de « mesurer l'irrégularité d'un objet ». En effet, la géométrie fractale est un des outils qui permet de mesurer le chaos, ou plutôt qui essaye de le quantifier. Cependant, elle peut être considérée comme une manière de voir le monde, indépendante du chaos. C'est pour cela que chaoticiens et fractalistes expriment les mêmes idées, mais n'ont pas la même priorité. Les premiers étudient la dynamique des systèmes, tandis que les seconds étudient la structure des systèmes (Stewart, 1998, p. 308).

Traditionnellement nous utilisons, pour décrire les formes que nous voyons, la géométrie euclidienne composée par les figures classiques (carré, cercle, triangle, polygones divers…). Ces formes si pratiques sont en réalité des archétypes, des schémas simplistes (mais nécessaires) des morphologies que l'on rencontre dans la Nature, car finalement seules les œuvres humaines, en architecture en particulier, les utilisent ; elles furent même au cœur du courant classique des XVII^e^-XVIII^e^ siècles. Le noyau central de la géométrie euclidienne est l'inégalité triangulaire et le théorème de Pythagore. Toutefois, Karl Fredrich Gauss découvrit une géométrie qui n'obéissait pas à ces règles ; ainsi naquit la première géométrie non euclidienne qui fut étudiée de manière plus complète par Bernhard Riemmann. La géométrie riemanienne vit ainsi le jour. Au cœur de celle-ci se trouve la notion de courbure qui permet de définir un espace courbe. En géographie, le meilleur exemple d'espace courbe est la surface de la Terre. En effet, si l'on recherche à représenter cette surface dans un espace euclidien qui est plat (c'est-à-dire non courbe), on est conduit nécessairement à augmenter la surface de la Terre car elle « se déchire » dans un espace plat (c'est-à-dire euclidien ou minkowskien).

Quelques années plus tard, Albert Einstein plaça la géométrie riemanienne au centre de sa théorie de la relativité du mouvement. Cependant, il est apparu à Benoît Mandelbrot que la géométrie riemannienne n'était qu'une géométrie non euclidienne particulière. Ainsi depuis une trentaine d'années, la géométrie euclidienne ainsi que la géométrie riemannienne furent englobées, dépassées par cette deuxième géométrie non euclidienne : la géométrie fractale (années 1950). Celle-ci étudie des formes irrégulières, ou qui nous apparaissent comme telles. Or, qu'y a-t-il de plus irrégulier et de plus structuré en échelles que les formes que l'on observe à la surface de la Terre. La géométrie riemanienne n'est donc qu'une approche triviale, qu'une première approximation possible des formes terrestres. Toutefois, le terme « fractal » est extrêmement général. En première approche, on peut citer la définition de Benoît Mandelbrot : « les fractales sont des objets - qu'ils soient mathématiques, dus à la nature ou dus à l'homme - qu'on appelle irréguliers, rugueux, poreux ou fragmentés, et qui, de plus, possèdent ces propriétés au même degré à toutes les échelles. C'est dire que ces objets ont la même forme qu'ils soient vus de près ou de loin » (Mandelbrot, 1997, p. 33). Cette définition est à nuancer, car elle n'est valable que dans le cas très particulier d'une autosimilarité de forme de référence.

Le principal outil permettant d'étudier les formes fractales, est ce que l'on appelle la dimension fractale ou plutôt les dimensions fractales qui présentent la particularité d'être parfois non entières, ce qui peut paraître surprenant, car Euclide et ses successeurs avaient défini les dimensions mathématiques comme étant strictement entières, ce sont les dimensions topologiques : la dimension zéro correspondant aux points, la dimension une aux courbes, la dimension deux aux surfaces et la dimension trois aux volumes (Figure 13). Depuis, on a ajouté à ceux-ci l'espace-temps à quatre dimensions de Hermann Minkowski et d'Albert Einstein et l'espace-temps fractal à cinq dimensions de Laurent Nottale. Ce concept de dimension au sens d'Euclide ne pouvait cependant définir que des figures que nous qualifierons de régulières, créées généralement par les Hommes oubliant que la Nature aime l'irrégularité. Ainsi, les dimensions fractales qualifient quelques-uns de ces objets oubliés. Il s'agit d'un « nombre qui quantifie le degré d'irrégularité et de fragmentation d'un ensemble géométrique ou d'un objet naturel, et qui se réduit, dans le cas des objets de la géométrie usuelle d'Euclide, à leurs dimensions usuelles » (Mandelbrot, 1975, p. 155). Toutefois, la dimension fractale ne remplace en rien la dimension topologique, elle la complète.

À partir de là, cette thèse présentera la relativité d'échelle de Laurent Nottale qui peut être vue comme une extension de la théorie mathématique de Benoît Mandelbrot ou un complément nécessaire à une théorie qui peut paraître difficile à mettre en œuvre.

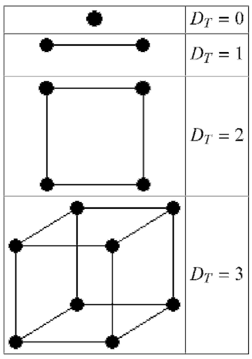

Figure 13. Définitions des dimensions topologiques

4.2. Les fractales et la relativité d'échelle

Après avoir évoqué dans les chapitres précédents, la philosophie générale de la relativité d'échelle, ce chapitre a pour objectif de décrire son aspect un peu plus technique. Pour ce faire, il faut simplement remarquer que la relativité d'échelle est une théorie physique qui met en œuvre l'idée que la dimension fractale d'un objet peut varier en fonction de sa résolution (ou d'une autre variable d'échelle). Autrement dit, l'irrégularité apparente d'un objet géographique physique ou humain se transforme en fonction de sa résolution. Les cours d'eau semblent être un bon exemple en géographie car la longueur d'un cours d'eau dépend de la résolution de la carte dans laquelle il se trouve. La longueur devient une fonction explicite de la résolution ε de la carte et peut s'écrire : $L(\varepsilon)$. Il en est de même pour une distance temporelle T qui peut dépendre explicitement de la résolution à laquelle on l'exprime. Mesurer un débit toutes les heures ne donne pas la même courbe que si l'on effectue cette mesure tous les quarts d'heure. Pourtant, il existe une loi d'échelle entre ces deux courbes qui les relie explicitement puisque de la courbe exprimée en quart d'heure, on peut déduire celle exprimée en heure. De même, de la courbe en heure, on peut déduire celle de toutes les deux heures, trois heures, quatre heures, …, *n* heures. La structure en échelles temporelles apparaît alors clairement sous la forme d'une loi.

L'expression est lancée : « loi d'échelle ». À ce niveau, il est important distinguer l'échelle de référence et l'échelle de résolution. La première correspond à l'unité de mesure : le mètre, le kilomètre, *etc*., tandis que la seconde caractérise l'échelle à partir de laquelle il existe une information tangible. Une loi d'échelle se rapporte à la nature de la transformation d'une résolution ε_1 en une résolution ε_2, et ainsi de suite. L'échelle de référence est, par contre, une constante. Benoît Mandelbrot (1967 ; 1975) montra que la transformation la plus simple existante suivait une loi puissance qui unit explicitement la longueur avec la résolution dans laquelle elle se trouve. Tout objet géographique est potentiellement un objet qui dépend de son échelle d'observation (Brunet, 1968 ; Lacoste, 1976). Quelle est la nature mathématique de cette dépendance ? Quels sont les nouveaux concepts qu'elle entraîne ? En quoi est-ce fondamental en géographie ?

4.2.1. La dépendance d'échelle

La dépendance d'échelle est un concept très général qui suppose l'existence d'une loi d'échelle entre la résolution et une variable d'échelle. Le cas le plus connu est celui de l'invariance d'échelle qui correspond à l'émergence d'une constante (la dimension fractale) qui lie la variable étudiée à sa variable d'échelle. Cependant, il ne faut pas confondre invariance d'échelle et autosimilarité (reproduction à l'infini d'une même forme). L'autosimilarité est une invariance d'échelle particulière, mais toute invariance d'échelle n'est pas autosimilaire. Le succès de l'invariance d'échelle est dû à sa simplicité (Mandelbrot, 1975). Toutefois, très vite, les lois d'échelle se compliquent dans une première approche que sont les multifractales. Il est important de rappeler que le concept de multifractalité a bien été inventé par Benoît Mandelbrot dans les années 1960 ; c'est ce qu'il avait appelé à l'origine « fractal ». Il a été repris par Giorgio Parisi et Uriel Frisch (1985) sous une autre forme. La multifractalité correspond à l'imbrication de plusieurs invariances d'échelle qui renvoie au concept d'échelles de coupure qui sera défini plus tard dans ce chapitre. Toutefois, la relativité d'échelle montre qu'il existe d'autres lois d'échelle possibles beaucoup plus générales et plus simples que les multifractales.

4.2.2. L'invariance d'échelle - L'approche empirique

L'invariance d'échelle correspond à une dimension fractale constante. Avant d'aborder la manière de caractériser la fractalité et les lois d'échelle les plus simples, il nécessaire de rappeler la définition d'une dimension.

4.2.2.1. Dimension topologique et dimension fractale

La notion de dimension est intuitive. Elle correspond soit au nombre de degré de liberté, soit au nombre de coordonnées nécessaires pour décrire tous les points d'un objet. Les exemples les plus explicites sont le segment, le carré, le cube, l'hypercube, *etc*. Pour expliquer la notion, il est plus simple d'utiliser l'exemple d'un carré transformé par une homothétie (Figure 14 et Figure 15)

Exemple 1. Si l'on agrandit un carré de côté ε_0 (carré rouge), d'un facteur 3, alors il faut 9 carrés de départ pour remplir le nouveau grand carré (Figure 14)

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Figure 14. Agrandissement ou réduction d'un carré par un facteur 3

Exemple 2. Si l'on agrandit un carré d'un facteur 5, alors il faut 25 carrés de départ pour remplir le nouveau grand carré (Figure 15).

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Figure 15. Agrandissement ou réduction d'un carré par un facteur 5

Plus généralement, si l'on agrandit un carré d'un facteur λ, alors il faut N carrés de départ pour remplir le nouveau grand carré. Soit $N = \varepsilon_0{}^D$ dans le cas du carré $D = 2$. Il est aisé de vérifier que :

$9 = 3^2$

$25 = 5^2$

etc.

D est appelée dimension d'homothétie. Après avoir vu la dimension 2, les dimensions les plus courantes sont 1 et 3 :

- pour $D = 0$, $N = \varepsilon_0{}^0$, on parlera alors de poussières ;
- pour $D = 1$, $N = \varepsilon_0{}^1$, on parlera alors de courbes ;
- pour $D = 3$, $N = \varepsilon_0{}^3$, on parlera alors de volumes ;

Ce qui différencie un objet euclidien d'un objet fractal est le fait que, pour un objet ou espace fractal, la dimension peut être non entière. Le conditionnel de cette phrase est fondamental, car ce n'est pas systématique. Ceci précisé, il reste à définir ce que sont les fractales autosimilaires. Pour cela, l'exemple type et le plus pédagogique reste la courbe de Koch (1904) (Figure 16).

La courbe de Koch s'obtient par un processus itératif simple. On part d'un segment que l'on divise en trois parties égales (Figure 16.a.). On supprime la partie centrale et on la remplace par un triangle équilatéral dont la partie adjacente au segment n'est pas reliée (Figure 16.b.). Cette figure s'appelle un générateur, car on reproduit cette forme de base dans tous les segments composants la structure de base (Figure 16.b.). Ainsi, à chaque étape, la structure devient de plus en plus complexe.

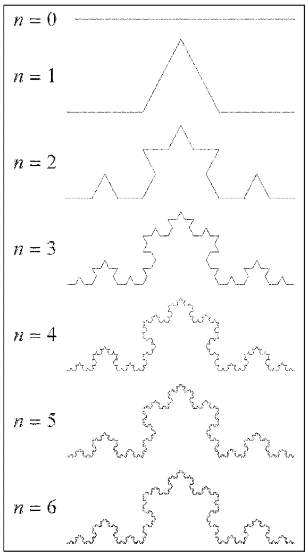

Figure 16. La courbe de Helge von Koch

La longueur totale de chaque étape vaut alors :

$L_{\mathrm{TOT}_0} = 1$; on pose $\varepsilon_0 = 3$, alors $L_{\mathrm{TOT}_0} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 3 \times \frac{1}{\varepsilon_0}$;

$L_{\mathrm{TOT}_1} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$; on pose $N = 4$, ce qui correspond au nombre de sous-segments valant $\frac{1}{\varepsilon_0}$;

$$L_{\mathrm{TOT}_2} = \frac{L_{\mathrm{TOT}_1}}{3} \times 4 = \left(\frac{4}{3}\right)^2$$

$$L_{\mathrm{TOT}_3} = \frac{L_{\mathrm{TOT}_2}}{3} \times 4 = \left(\frac{4}{3}\right)^3$$

...

$$L_{\mathrm{TOT}_n} = \frac{L_{\mathrm{TOT}_{n-1}}}{3} \times 4 = \left(\frac{4}{3}\right)^n$$

Cette itération, très simple, revient à dilater d'un facteur 3^n le générateur et de multiplier par 4^n le nombre de segments. Ainsi, si on applique $N = {\varepsilon_0}^D$, on obtient $4^n = (3^n)^D$. Dans ce cas, D a peu de chance d'être entier. La courbe de Koch possède donc une dimension homothétique non entière : $D = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1{,}27...$ D est une grandeur que l'on appelle dimension fractale. Cette dernière permet de « mesurer » la fractalité d'un objet. Toutefois, il existe d'autres dimensions que celle homothétique. Plusieurs définitions sont possibles pour caractériser une dimension fractale. Ainsi, il existe la dimension fractale de boîtes, la dimension fractale de Hausdorff, la dimension fractale de Minkowski, *etc*. Un même objet peut donc avoir plusieurs dimensions fractales permettant de le caractériser, même si dans la plupart des cas, les différentes méthodes fournissent des valeurs de dimensions fractales égales.

De plus, la courbe de Koch permet également de constater qu'une fractale correspond à une structure dans la structure. Dans ce cas autosimilaire, on trouve le générateur dans chaque segment le composant. Une structure fractale possède alors au minimum deux niveaux. L'irrégularité seule ne suffit pas à caractériser une structure en échelle. Ce point est fondamental, car il explique parfaitement qu'un arbre soit fractal pris globalement (c'est-à-dire à sa limite), mais qu'une de ces branches aussi irrégulière soit-elle, ne le soit pas. Autrement dit, la courbe de Helge von Koch est irrégulière et ordonnée à différentes échelles. Cela permet de définir la géométrie fractale de manière plus profonde. Elle correspond à un fractionnement hiérarchisé de la matière. C'est pourquoi, en géographie, la géométrie fractale permet de comprendre l'organisation d'un espace hétérogène et anisotrope. Le document se trouvant à l'adresse URL suivante : http://www.dunod.com/documents/48387/Front_annexe_A.pdf, résume bien cette idée : « L'Homme, colonisant l'espace qui lui est attribué, y crée, aux échelles de son activité, une telle géométrie. Le réseau routier, qui comprend des voies de toutes tailles (des autoroutes aux sentiers) ramifiées et interconnectées, évitant les obstacles, et reliant tous les lieux destinés à interagir, montre une géométrie rappelant celle des racines ou des mycéliums dans le sol. A d'autres échelles au contraire, la géométrie fractale est plutôt un handicap. Nous nous efforçons alors de la remplacer par une géométrie localement euclidienne : nous égalisons les terrains, supprimons tout ce qui dépasse et tous les creux, rectifions les côtes, remplaçons la « nature sauvage » par le jardin - quitte à se passer des propriétés originales, parfois irremplaçables, d'un habitat fractal ; mais la maîtrise des géométries inextricables nous manque » [http://www.dunod.com/documents/4838\7/Front_annexe_A.pdf]. Ce qui amène naturellement à se poser la question de la définition de la dimension fractale d'un objet non autosimilaire.

4.2.2.2. La dimension fractale non autosimilaire

Un objet fractal non autosimilaire[1] peut, comme la courbe de Helge von Koch, posséder une dimension fractale constante. Toutefois, dans de nombreux cas, la dimension fractale varie en fonction de la résolution ou l'objet lui-même se structure en échelle par des lois beaucoup plus complexes que ce chapitre développera plus tard. La loi d'échelle la plus simple s'écrit :

$$L(\varepsilon) = L_0 \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \right)^{D-D_T}$$

où : L correspond à la longueur variable en fonction de la résolution ; L_0 et ε_0 correspondent aux paramètres initiaux, c'est-à-dire à la longueur normée de la première carte et à la longueur mesurée sur la carte ; ε désigne la variable d'échelle ; D correspond à la dimension fractale et D_T correspond à la dimension topologique. Cette loi se démontre de manière géométrique par le simple arpentage d'une courbe irrégulière et hiérarchisée (Figure 17).

- L'arpentage d'une courbe fractale

L'arpentage est une méthode qui revient à mesurer la longueur d'une courbe grâce à des pas (résolution) successifs.

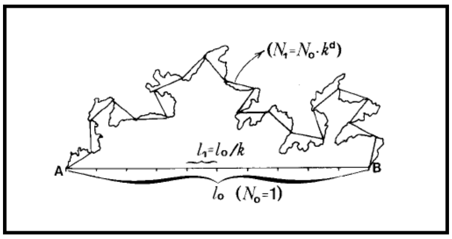

Figure 17. Arpentage d'une courbe fractale
Source : http://www.dunod.com/documents/48387/Front_annexe_A.pdf

On pose L_n = AB, la plus longue distance entre A et B. Soit l_0 = AB (précédemment, on l'avait nommé ε_0), la distance la plus courte entre A et B c'est-à-dire la distance à vol d'oiseau. l_0 va servir de résolution de référence. De plus, par définition, on sait que la longueur L_n est un rapport de proportionnalité avec une résolution l_n ce qui revient à compter L_0 telle que :

$$L_0 = N_0 \times l_0^{D_T} \text{ avec } N_0 \in \mathbb{R}$$

Si on utilise maintenant une unité plus petite l_1 reliant toujours A et B par la plus courte distance et correspondant à une réduction k de l'étalon précédent, alors, tout comme la courbe Koch,

$$l_1 = \frac{l_0}{k} \text{ avec } k \in \mathbb{R} \text{ (et non plus } \mathbb{N}\text{)}$$

d'où la longueur totale du niveau suivant :

$$L_1 = N_1 \times l_1^{D_T} \text{ avec } N_0 \neq N_1 \text{ c'est-à-dire } L_0 \neq L_1.$$

Plus généralement, $l_n = \frac{l_{n-1}}{k}$ ou $l_n = \frac{l_0}{k^n}$ et $L(l_n) = N(l_n) \times l_n^{D_T}$.

D'après les règles d'agrandissement vue précédemment, on sait que si l'on pose une longueur caractéristique N_0 de l'objet, alors le rapport de proportionnalité varie comme :

$$N_1 = N_0 \times k^D \text{ avec } D \text{ appartenant au corps des réels ou à celui des complexes.}$$

Il est nécessaire de multiplier k^D par N_0 car ici nous avons une unité de référence N_0, appelée longueur caractéristique (ou unité de mesure). Plus généralement,

$$N_n = N_0(k^n)^D$$

Plus généralement, $L_n = N_n \times l_n^{D_T} = N_0(k^n)^D l_n^{D_T} = N_0\left(\frac{l_0}{l_n}\right)^D l_n^{D_T} = N_0 l_0^{D_T} \left(\frac{l_0}{l_n}\right)^D \left(\frac{l_n}{l_0}\right)^{D_T}$ c'est-à-dire $L_n = L_0\left(\frac{l_0}{l_n}\right)^{D-D_T}$ ici $D_T = 1$.

Si on linéarise l'équation, on obtient alors $\ln L_n = \ln L_0 + (D - D_T)\ln\left(\frac{l_0}{l_n}\right)^{D-D_T}$. Cette méthode montre qu'il est plus simple d'adimensionner le problème. En effet, puisque $L(l_n) = N(l_n) \times l_n^{D_T}$ et $L_n = L_0\left(\frac{l_0}{l_n}\right)^{D-D_T}$, $N(l_n) = l_n^{D_T} = L_0\left(\frac{l_0}{l_n}\right)^{D-D_T}$, or $L_0 = N_0 \times l_0^{D_T}$, donc $N(l_n) = N_0\left(\frac{l_0}{l_n}\right)^{D_T}\left(\frac{l_0}{l_n}\right)^{D-D_T} = N_0\left(\frac{l_0}{l_n}\right)^{D}$.

Ces relations permettent de définir la fractalité à travers les cartes géographiques.

■ Le cas des cartes géographiques

En géographie, il est évident que la longueur mesurée sur une carte entre deux points varie en fonction de l'échelle à laquelle on effectue la mesure. Le résultat de la mesure dépend donc de la résolution ε définie, en cartographie, de la manière suivante :

$$\varepsilon^{D_T} = \frac{L(\varepsilon) \longrightarrow \text{longueur normée correspond à une mesure sur le terrain}}{N(\varepsilon) \longrightarrow \text{longueur correspondant sur la carte (ou la résolution)}}$$

Autrement dit,

$$L(\varepsilon) = N(\varepsilon) \times \varepsilon^{D_T}$$

Cette formule implique que le passage d'une carte à une autre n'est pas qu'un simple rapport d'échelle. Il s'agit d'une transformation beaucoup plus complexe. Le problème de l'effet d'échelle peut alors s'exprimer mathématiquement de la manière suivante : « comment varie la longueur mesurée en fonction de la résolution à laquelle on la mesure ? » La plus simple trouvée est bien entendu à nouveau :

$$L_n = L_0\left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_n}\right)^{D-D_T}.$$

Nombreux sont ces objets de « longueurs infinies » en géographie : la côte de la Grande-Bretagne (Mandelbrot, 1967), les cours d'eau, le réseau routier, *etc*.

L'idée de fractalité en cartographie consiste à affirmer qu'entre deux cartes de résolutions ε_1 et ε_2, les longueurs $L(\varepsilon_1)$ et $L(\varepsilon_2)$ ne seront pas identiques, car leur valeur dépend de la résolution choisie. Cette proposition a pour corollaire : $N(\varepsilon_1) \neq N(\varepsilon_2)$. Si l'on prend un exemple très exagéré, et que l'on suppose qu'à une carte d'échelle 1 / 25 000, N_0 = 50 cm pour un objet géographique donné. Sa longueur normalisée (celle du terrain) correspondrait à L_0 = 12,5 km, on peut alors dresser un tableau montrant la variation des longueurs en fonction de l'échelle de la carte (Figure 18). Dans ce cas, L_0 est une longueur caractéristique servant d'étalon et ε_0 correspond à l'échelle de référence.

n	Longueur mesurée sur la carte N avec un degré de précision de 1 cm	Résolution ε (cm)	Longueur normalisée L (km)
0	50	25 000	12,5
1	22	50 000	12,5
2	9	100 000	12,5
3	5	150 000	12,4
4	3	200 000	12
5	1	500 000	10

Figure 18. Loi d'échelle fractale

La loi d'échelle correspondante pour les longueurs normalisées serait donc :

$$L_n \approx 1\ 250\ 000 \left(\frac{\varepsilon}{25\,000}\right)^{\delta} \text{ avec, ici, } D \approx 1{,}3 \text{ et } \delta = D - 1.$$

La Figure 18 est bien loin de ce que croient la plupart des géographes et que l'on peut résumer dans la Figure 19.

n	Longueur mesurée sur la carte N	Résolution ε (cm)	Longueur normalisée L (km)
1	50	25 000	12,5
2	25	50 000	12,5
3	12,5	100 000	12,5
4	6,25	200 000	12,5
5	1,25	1 000 000	12,5
6	0,125	10 000 000	12,5

Figure 19. Loi d'échelle non fractale

Lorsque l'on calcule la dimension fractale de cette structure en échelle comme étant le rapport entre le logarithme népérien de la longueur mesurée et le logarithme népérien de la résolution ($1/\varepsilon$), on ne trouve pas systématiquement une dimension fractale constante correspondant à la pente de la droite obtenue en ($\ln L$, $\ln(1/\varepsilon)$) qui correspond à l'invariance d'échelle. Il faut bien comprendre que cette pente n'est autre que la limite de la variation de la longueur L par rapport à celle de la résolution ε lorsque ε tend vers 0.

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\Delta \ln L}{-\Delta \ln \varepsilon} = D - D_T$$

Autrement dit, la dimension fractale invariante d'échelle est définie à la limite de l'objet fractal. Bien qu'elle demeure un cas souvent rencontré, en règle générale, elle n'est pas satisfaisante pour caractériser les « objets réels ». En effet, dans la plupart des cas, l'ajustement le plus pertinent en ($\ln L$, $\ln(1/\varepsilon)$) est un ajustement non linéaire. Il peut s'agir d'un polynôme, par exemple, et là, il n'est pas possible de s'en sortir avec les techniques classiques. Que faire de ces ajustements qui sont nettement meilleurs que l'ajustement linéaire ? La réponse à cette interrogation peut être trouvée grâce à la théorie de la relativité d'échelle dont il faut reprendre les principales étapes de construction. Une transformation d'échelle n'est donc pas une simple homothétie. Cela revient à dire que, lorsque l'on applique une homothétie sur un objet, les structures obtenues ne sont pas forcément homothétiques. Elles correspondent alors à l'apparition de nouvelles structures à différents niveaux. Avant de passer au cœur de la théorie de la relativité d'échelle, il faut définir les différentes méthodes de calcul d'une dimension fractale.

4.2.3. Évaluer une dimension fractale

Il existe plusieurs modèles de calcul de dimension fractale. La plus facile à mettre en œuvre est une dimension fractale de boîtes (carrées, rectangulaires, circulaires, hexagonales, triangulaires, avec des losanges, cubiques, sphériques, *etc*.). La plupart du temps, on utilise une méthode indirecte pour déterminer la dimension fractale. Dans la formule $L(\varepsilon) = N(\varepsilon) \times \varepsilon^{D_T}$, N correspond à la longueur mesurée sur la carte, mais il s'agit plus généralement d'un nombre entier dû à la résolution choisie. Si cette résolution est une boîte de taille variable de dimension topologique D_T correspondant à celle de l'objet à mesurer, il suffit de compter pour chaque taille le nombre de boîtes pleines pour estimer la dimension fractale dans un graphique bi logarithmique [$\ln(\varepsilon)$ - $\ln(N(\varepsilon))$]. Par exemple, pour la formule de l'invariance d'échelle :

$$L(\varepsilon) = L_0\left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)^{D-D_T}$$

il est facile de remplacer $L(\varepsilon)$ et L_0 par leur valeur respective :

$$N(\varepsilon) \times \varepsilon^{D_T} = N_0\varepsilon_0{}^{D_T}\left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)^{D-D_T} = N_0\varepsilon_0{}^{D_T}\left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)^{D}\left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)^{-D_T} = N_0\varepsilon_0{}^{D_T}\left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)^{D}\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{D_T}$$

d'où

$$N(\varepsilon) = N_0\left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)^{D}$$

Cette formule est remarquable car elle permet d'évaluer directement la dimension fractale à partir d'un simple comptage avec différentes résolutions.

4.2.3.1. Dimension par comptage de boîtes carrées

La méthode est très simple : il s'agit de créer artificiellement une maille carrée ε_n variable. Se faisant, la dimension fractale se calcule en comptant le nombre N_n de carrés contenant une partie de l'objet mesuré C. La dimension de comptage de boîtes carrées correspond, dans un espace bi logarithmique entre le côté du carré (qui sert de résolution) et le nombre de carrés, à la pente de la droite observée, s'il s'agit d'un ajustement linéaire. Autrement dit,

$$D_B = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln N_n}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}.$$

Cette méthode donne directement la dimension fractale de l'objet sans faire intervenir sa dimension topologique (Barnsley, 1988).

Si ce calcul est séduisant par sa simplicité, Alain Le Méhauté (1990) souligne que « cette méthode présente cependant d'assez graves inconvénients. En particulier si $\frac{1}{\varepsilon}$ n'est pas entier, les carrés de côtés ε_n vont généralement déborder à gauche et à droite du graphe de C, ce qui fausse les résultats et introduit des irrégularités dans le diagramme, surtout lorsque ε_n est grand » (Le Méhauté, 1990, p. 50). En effet, passer une certaine taille, le nombre de boîtes est strictement homothétique ; sa dimension fractale vaut alors 2. Aujourd'hui, cette déviation est connue sous le nom de correction log-périodique (Sornette, 1998 ; 2000 ; 2003 ; 2006 ; Nottale, 1997). Toutefois, en pratique, les fluctuations apportées par ce biais sont telles que lors d'un ajustement par la méthode des moindres carrés, la fonction ajustée passe, en général, au niveau de la valeur moyenne des fluctuations, ce qui fait qu'en moyenne dans les fortes fluctuations apportées par ce biais, la dimension fractale des grandes boîtes s'ajuste sur celle des petites boîtes. Enfin, pour limiter cet effet, il suffit d'utiliser une suite dyadique dans la taille du côté des carrés, c'est-à-dire que les grilles utilisées vont parfaitement s'emboîter en suivant la loi du type : $\varepsilon_n = 2^{-n}$.

En géographie, ce calcul est très fréquent car l'analyse d'images est courante. En effet, la taille minimale du carré d'une grille ne fait que représenter la taille d'un grain sur une carte, d'un pixel sur une image satellite donnée, *etc*. De plus, le calcul est très simple à programmer : il suffit d'utiliser une partie entière pour savoir si tel pixel fait partie de tel carré. Il suffit de normaliser la grille en fonction de la résolution utilisée et d'y appliquer une partie entière pour connaître la position de chaque point par rapport à la résolution de la grille. Afin de faciliter la lecture des graphiques ($\ln \varepsilon$ - $\ln N(\varepsilon)$), la résolution variable ε sera systématiquement donnée soit en mètre, soit en kilomètre.

Soit un repère orthonormé. Soient K et L les valeurs d'une grille de résolution ε. Alors $\begin{cases} K = \mathrm{E}\left(\frac{x_i}{\varepsilon} + 1\right) \\ L = \mathrm{E}\left(\frac{y_i}{\varepsilon} + 1\right) \end{cases}$. Il faut noter que cette fonction permet d'arrondir systématiquement, par défaut, un nombre réel à sa partie entière. Par exemple, E(1,25) = 1. E(311,262616) = 311, mais pour connaître la position exacte dans une grille avant d'appliquer la partie entière sur la fraction, il est nécessaire d'y ajouter 1 pour positionner correctement le point dans la grille (Figure 20).

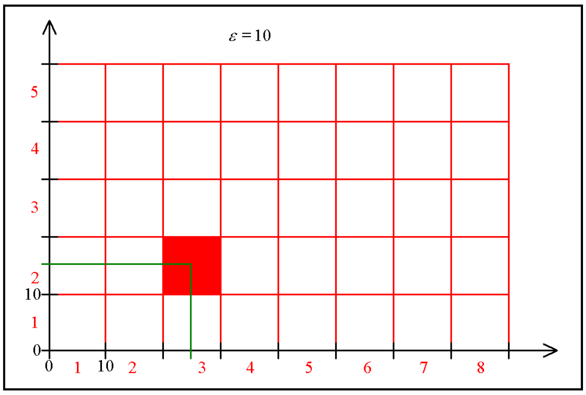

Figure 20. Méthode de calcul d'une dimension fractale par comptage de boîtes carrées

La résolution ε = 10 signifie qu'en deçà de cette échelle, il n'y a plus d'informations disponibles. Autrement dit, pour notre exemple (en vert) l'abscisse sera arrondie à 30 et l'ordonnée sera arrondie à 20. Si x = 25 et y = 15 alors ces deux points appartiendront à $K = \mathrm{E}\left(\frac{25}{\varepsilon} + 1\right) = 3$ et $L = \mathrm{E}\left(\frac{15}{\varepsilon} + 1\right) = 2$. Si on multiplie ($K$, L) par la résolution ε = 10, on trouve bien (30, 20).

4.2.3.2. Dimension par comptage de boîtes hexagonales

La dimension par comptage de boîtes hexagonales est calculée en suivant la même méthode que la dimension fractale de boîtes carrées. En effet, seule la forme globale de la grille change : au lieu d'avoir des carrés, on aura des hexagones réguliers. Le pavage d'hexagones réguliers permet de remplir complètement l'espace en respectant une équidistance entre les angles et les centres. Tout comme la dimension fractale par comptage de boîtes carrées, celle de boîtes hexagonales s'obtient dans un espace bi logarithmique entre le côté de l'hexagone et le nombre d'hexagones non vides. La dimension fractale correspond à la pente de la droite observée, s'il s'agit d'un ajustement linéaire.

Toutefois, le maillage hexagonal régulier présente ses propres difficultés techniques : (1) d'abord dans la création de la grille ; (2) puis dans la possibilité de compter les boîtes. La méthode la plus simple pour créer une grille hexagonale consiste à dessiner deux hexagones tels que le montre la Figure 21 est de les translater dans toutes les directions du plan. Une fois la grille créée, il suffit de faire varier la résolution (le côté de l'hexagone) pour obtenir un procédé analogue à la méthode par comptage de boîtes carrées (Figure 22). Il est important de remarquer que le fait que les grilles hexagonales ne s'emboîtent pas n'est pas un problème. Comme cela a été entrevu dans le paragraphe précédent, les grilles carrées ne s'emboîtent qu'à condition que la suite formée par les facteurs d'échelle soit dyadique. Un autre problème plus important apparaît : celui du comptage.

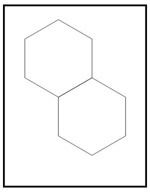

Figure 21. Générateur pour fabriquer une grille hexagonale

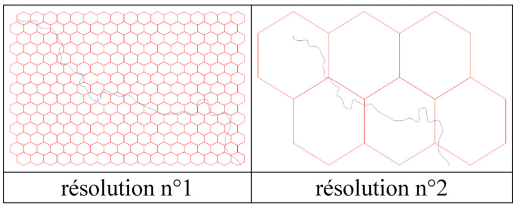

Figure 22. Grilles hexagonales à mailles variables

En effet, pour une grille carrée, il suffit d'introduire une partie entière pour décider si un pixel fait parti d'un carré de la grille. Pour un pavage hexagonal, le problème du comptage ne peut se résumer à cette simplicité. Dans ce cas, il faut faire intervenir les équations des droites qui composent la boîte hexagonale et résoudre un système de six inéquations à six inconnues :

$$\begin{cases} x \geq b_1 \\ y \geq a_2 x + b_2 \\ y \geq a_3 x + b_3 \\ x \leq b_4 \\ y \leq a_5 x + b_5 \\ y \leq a_6 x + b_6 \end{cases}$$

La première équation correspond à la Figure 23 à la droite n°1, la seconde à la droite n°2, *etc*. Ce système est facilement programmable. Toutefois, les temps de calcul sont dix à cent fois plus longs que celui de la dimension par comptage de boîtes carrées.

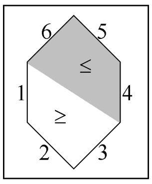

Figure 23. Hexagone et signe des équations de droites

Cette méthode permet-elle d'obtenir de meilleurs résultats que la dimension par comptage de boîtes carrées ? Pour ce, il faut effectuer un test (Figure 24).

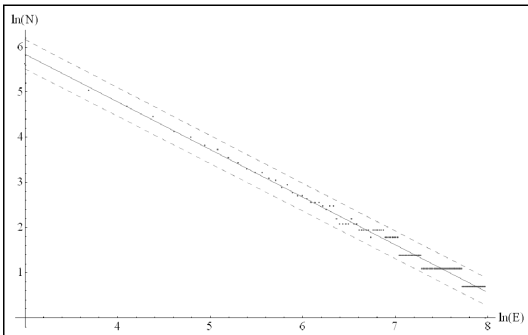	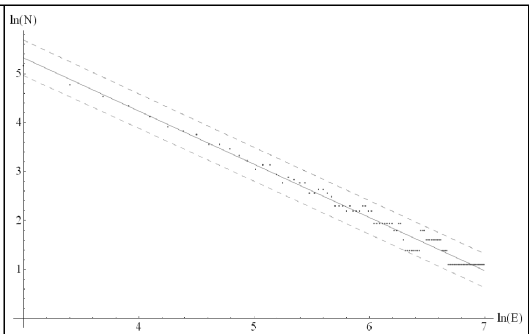
$\ln N = -1{,}055\ (\pm\ 0{,}010)\ln \varepsilon + 9{,}003\ (\pm\ 0{,}073)$ Intervalle de confiance 99% Mesure d'une dimension fractale par comptage de boîtes carrées ϵ est en mètre	$\ln N = -1{,}086\ (\pm\ 0{,}015)\ln \varepsilon + 8{,}581\ (\pm\ 0{,}089)$ Intervalle de confiance 99% Mesure d'une dimension fractale par comptage de boîtes hexagonales ϵ est en mètre

Figure 24. Comparaison entre une mesure de dimension fractale par comptage de boîtes carrées et une mesure de la dimension fractale par comptage de boîtes hexagonales

A travers ces résultats, on perçoit bien que les deux résultats sont à peu près équivalents. En effet,

$$\Delta = 1{,}086 - 1{,}054 = 0{,}032$$

$$\sigma_\Delta = \sqrt{0,015^2 + 0,010^2} = 0{,}018$$

Aussi, dans la suite, de cette thèse, la méthode par comptage de boîtes carrées sera systématiquement utilisée.

4.2.3.3. Grilles et densités locales

À partir d'un pavage, il est possible de connaître la position précise des pixels dans la grille. Une densité locale peut alors être calculée. Elle correspond au rapport entre le nombre de pixels contenus dans le carré ou l'hexagone considéré et la surface de ce carré ou de cet hexagone. Pour chaque résolution envisagée, il est donc possible de calculer une telle densité et d'en réaliser la répartition dans l'espace (cf. chapitre 10).

4.2.3.4. Dimension fractale par comptage de boîtes circulaires

Une telle dimension fractale s'obtient de la même manière que les dimensions par comptage de boîtes carrées ou hexagonales (Figure 25), la variation du rayon du cercle correspondant à la résolution.

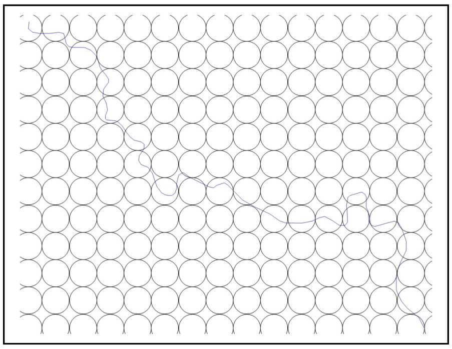

Figure 25. Méthode de calcul par une grille composée de boîtes circulaires

4.2.3.5. Dimension radiale

La dimension fractale radiale est une autre dimension fractale par comptage de boîtes (Morency et Chapleau, 2003). Au lieu de calculer le nombre de carrés ou d'hexagones non vides, on dénombre le nombre de points contenus dans les anneaux. La difficulté par rapport aux autres types de comptage est qu'il faut réaliser la mesure en tout point (ou pixel) et en faire une moyenne. La résolution, ici, est donnée par l'intervalle entre les anneaux. Pour obtenir une estimation de la dimension fractale, il suffit d'appliquer le même principe que la dimension par comptage de boîtes carrées ou hexagonales, à savoir dans un espace bi logarithmique entre la résolution et le nombre de points moyens contenus dans les anneaux par résolution considérée. S'il s'agit d'une relation linéaire, la pente de la droite observée donne directement la dimension fractale.

4.2.4. De l'invariance d'échelle aux lois d'échelle généralisée - L'approche analytique

L'approche analytique généralisée de la dimension fractale est une grande nouveauté de la relativité d'échelle. Elle débute par la construction de fonctions dites scalantes et d'un opérateur différentiel de dilatation.

4.2.4.1. Fonction scalante

En première approche des lois d'échelle, il y a les fonctions scalantes qui s'obtiennent en trois étapes (Nottale, 2010).

(1) Soit une dilatation ou une contraction q sur une variable de position X.

$$\begin{cases} X \longrightarrow X' \\ X' = qX \end{cases}$$

On appelle fonction scalante f :

$$\mathrm{f}(qX) = q^{\alpha}\mathrm{f}(X)$$

(2) On passe d'une résolution à une autre par la relation :

$$\begin{cases} \varepsilon \longrightarrow \varepsilon' \\ \varepsilon' = \rho\varepsilon \end{cases}$$

Soit X une variable de position dépendant de la résolution. Alors

$$X(\rho\varepsilon) = \rho^{-\delta}X(\varepsilon)$$

où $D_F = 1 + \delta$.

(3) Généralement, la position dépend d'une autre fonction f (la vitesse par exemple)

$$\mathrm{f}(\rho^{-\delta}X) = \rho^{-\delta\alpha}\mathrm{f}(X)$$

où $D_F' = 1 + \delta\alpha$.

4.2.4.2. Opérateur différentiel de dilatation

Qui ne s'est pas demandé lorsqu'il utilise les fractales, pourquoi travaille-t-on avec le logarithme de la résolution, et pas directement sur la résolution ? La réponse à cette question tient en quelques lignes.

Conformément à la méthode dite de Gell-Mann-Levy, on définit une dilatation ou une contraction infinitésimale $\mathrm{d}\rho$ de la résolution ε. (Figure 26).

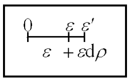

Figure 26. Schéma d'une dilatation infinitésimale

La résolution ε' s'écrit $\varepsilon' = \varepsilon(1 + \mathrm{d}\rho)$ car $\varepsilon\mathrm{d}\rho \longrightarrow 0$. On sait que la longueur L est fonction de cette résolution, ce qui s'écrit $L(\varepsilon(1+ \mathrm{d}\rho))$. Que vaut cette fonction ? Pour l'établir, on utilise un développement limité de Taylor, ce qui donne :

$$L(\varepsilon') = L[\varepsilon(1 + \mathrm{d}\rho)] = L(\varepsilon) + (\varepsilon + \varepsilon\mathrm{d}\rho - \varepsilon)\frac{\partial L(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} = L(\varepsilon) + \varepsilon\mathrm{d}\rho\frac{\partial L(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} = L(\varepsilon) + \frac{\partial L(\varepsilon)}{\partial \ln \varepsilon}\mathrm{d}\rho$$

Même si l'on s'est arrêté au premier ordre, on voit très bien que l'on ne travaille pas directement sur la résolution ε mais avec son logarithme.

On peut donc définir ce que l'on appelle un opérateur différentiel de dilatation $\check{D} = \frac{\partial}{\partial \ln \varepsilon}$. Cela revient à dire que l'on peut désormais utiliser $\ln \varepsilon$ comme variable naturelle des lois d'échelle (Nottale, 1994) avec toutes les conséquences mathématiques que cela implique c'est-à-dire que ε n'est pas définie en zéro et doit être positif.

4.2.4.3. L'invariance d'échelle démontrée analytiquement

Fort de cet opérateur différentiel de dilatation, comment se comporte une variation de la longueur en fonction du logarithme de sa résolution ? Pour y répondre, il faut reprendre la méthode exposée par Jean-Paul et Françoise Bertrandias (1997). On suppose que la courbe de la fonction L recherchée soit continue. Autrement dit,

$$\lim_{\Delta \ln \varepsilon \longrightarrow 0} = \frac{\Delta \mathrm{L}}{\Delta \ln \varepsilon} = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d} \ln \varepsilon} = \beta(L)$$

Il faut alors noter que l'échelle de référence λ intervient si bien que l'on devrait plutôt écrire $\frac{\varepsilon}{\lambda}$ à la place de ε, mais comme λ est une constante, lorsqu'on la dérive cette valeur devient nulle. Ainsi, pour alléger les calculs, on ne prend en considération que ε.

La première fonction $\beta(L)$ que nous pouvons tester grâce à un développement limité est a.

$$L = a \ln \varepsilon + L_0$$

La seconde fonction $\beta(L)$ que l'on peut tester grâce à un développement limité est aL.

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d} \ln \varepsilon} = aL \Longleftrightarrow L = L_0 \left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right)^{-\delta} \text{ avec } -\delta = D - D_T$$

On retrouve bien l'équation fondamentale caractérisant l'invariance d'échelle. La dimension fractale est alors bien égale à :

$$\frac{\mathrm{d} \ln L}{\mathrm{d} \ln \varepsilon} = a = D_T - D.$$

4.2.4.4. L'apparition spontanée d'une zone de transition fractal - non fractal

Ensuite, on peut ajouter un terme b : $b + aL$.

$$\frac{dL}{d\ln\varepsilon} = b + aL \Longleftrightarrow L = L_0\left[1+\left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right)^{-\delta}\right] \text{ avec } -\delta = D - D_T$$

Géométriquement, cette loi se traduit par une brisure spontanée de l'invariance d'échelle.

$$L \longrightarrow L' = L + L_1 = L_0\left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right)^{\tau} + L_1$$

L' correspond à une translation c'est-à-dire un changement de repère. Après quelques calculs, on trouve :

$$L' = L_1\left[1+\left(\frac{\lambda_1}{\varepsilon}\right)^{\tau}\right] \text{ avec } \tau = D - D_T$$

avec la nouvelle échelle de coupure définie telle que $\lambda_1 = \lambda\left(\frac{L_0}{L_1}\right)^{\frac{1}{\tau}}$. Toutefois, il est important de noter que, dans ce cas, la dimension fractale est toujours alors bien égale à :

$$\frac{d\ln L}{d\ln\varepsilon} = (D - D_T)\,\frac{1}{1+\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{D-D_T}}$$

ce qui peut prêter à confusion avec l'invariance d'échelle.

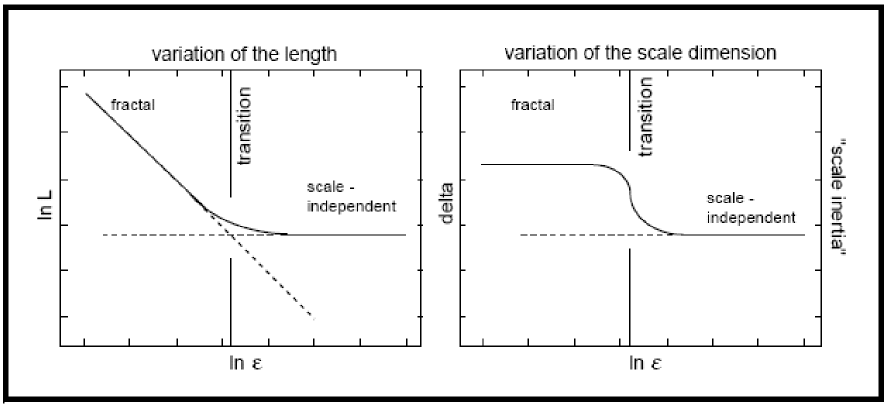

Figure 27. Le modèle à une transition fractal - non fractal (Nottale, 1993)

Le premier graphique montre la relation dans un espace bi logarithmique. On voit bien que contrairement au modèle sans transition la partie fractale ne se poursuit pas jusqu'à l'infini. A une certaine échelle, la fractalité est interrompue. Le second graphique montre la variation locale (ou la dérivée) de la dimension fractale

4.2.5. La dépendance d'échelle et la construction de lois d'échelle

Puis, vient le cas de $c + bL + aL^2$

$$\frac{dL}{d\ln\varepsilon} = b + aL \Longleftrightarrow L = L_0\frac{\left[1+\left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)^{\tau}\right]}{\left[1+\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\right)^{\tau}\right]} \text{ avec } \begin{cases} a = & -\frac{\tau L_0 L_1}{L_0 - L_1} \\ b = & \tau\,\frac{L_0 + L_1}{L_0 - L_1} \\ c = & -\frac{\tau}{L_0 - L_1} \end{cases}$$

La dimension fractale locale est donc égale, dans ce cas à :

$$\frac{d\ln L}{d\ln\varepsilon} = -\tau\varepsilon^{\tau}\frac{\varepsilon_1{}^{\tau} - \varepsilon_0{}^{\tau}}{(\varepsilon_0\,\varepsilon_1)^{\tau} + \varepsilon^{\tau}\left(\varepsilon_1{}^{\tau} - \varepsilon_0{}^{\tau} - \varepsilon^2\right)}$$

Et ainsi de suite. Ce cas correspond en fait au calcul d'une dimension de boîtes avec ces deux échelles de coupure ε_0 et ε_1 (Lesne, 2004).

4.2.6. Les multifractales

Dans le cadre de la relativité d'échelle, les multifractales apparaissent comme étant des structures plus générales. En effet, jusqu'ici, on a toujours considéré les dimensions topologiques c'est-à-dire que l'on a toujours supposé que l'objet possédait une partie non fractale. Il n'est pas exclu que l'objet soit déjà fractal. Dans ce cas, si l'on reprend le modèle à une transition, on peut prétendre que L_0 soit lui-même fractal : $L_0 = \alpha\left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)^{D_1}$, d'où

$$L(\varepsilon) = \alpha\left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)^{D_1}\left[1 + \beta\left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)^{D_2}\right]$$

Cette équation est remarquable car elle prouve que l'on n'a pas besoin d'avoir recours à des méthodes de statistiques discrètes assez complexes (Dubois, 1995 ; OMT, 1995) pour étudier les multifractales d'un point de vue théorique.

4.2.7. La correction log-périodique

La correction log-périodique est un ajustement qui permet de rendre compte de certaines fluctuations que l'on peut observer autour d'une loi puissance, d'où le choix du terme « correction », même si, parfois, la « correction » est dominante. Il s'agit réellement de corriger la loi d'échelle initiale pour obtenir un meilleur ajustement. Cette correction est fondamentale car en fonction de la longueur d'onde de celle-ci, on peut risquer de mesurer la fluctuation, au lieu de mesurer la dimension fractale (Figure 28). Il en existe deux grandes versions : celle de Didier Sornette et celle de Laurent Nottale.

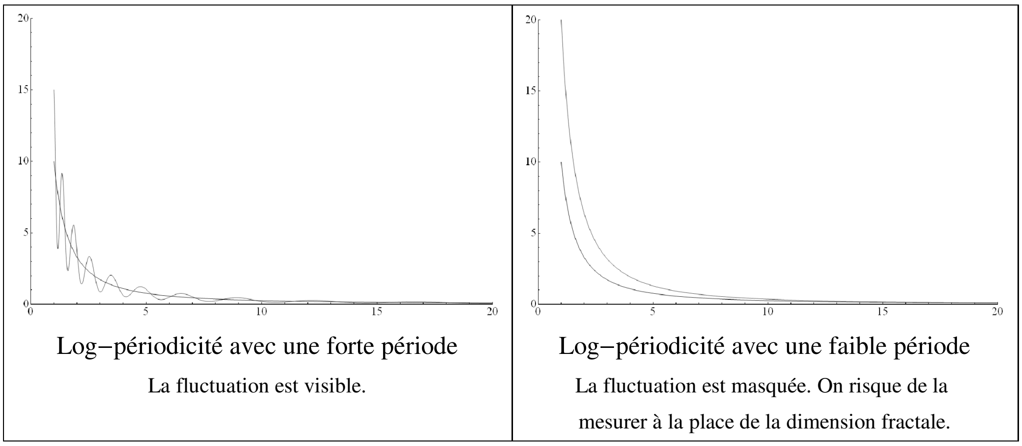

Figure 28. Fluctuation log-périodique et mesure de la dimension fractale

4.2.7.1. La version de Didier Sornette (1997)

Didier Sornette a essayé de modéliser l'oscillation observée en utilisant une dimension fractale complexe. Rappelons qu'un nombre complexe est un nombre z tel que $z = a + ib$, où a est appelé la partie réelle et ib la partie imaginaire avec $i^2 = -1$. Ainsi arrive-t-on à modéliser cette oscillation en utilisant la forme trigonométrique des nombres complexes. En effet,

$$L = L_0\varepsilon^{D'} = L_0\varepsilon^{D+i\omega} = L_0\varepsilon^{D}\,\varepsilon^{i\omega} = L_0\varepsilon^{D}\,e^{i\omega\ln\varepsilon}$$

$$L = L_0\varepsilon^{D}[\cos(\omega\ln\varepsilon) + i\sin(\omega\ln\varepsilon)]$$

où : D est la dimension fractale et ω est la phase de la fluctuation log-périodique.

La partie réelle est

$$\mathrm{Re}(\varepsilon) = L_0\varepsilon^{D}\cos(\omega\ln\varepsilon)$$

Elle correspond à une fluctuation log-périodique. Il faut remarquer qu'il est très courant dans des sciences, comme la physique, d'utiliser les nombres complexes pour ensuite revenir aux nombres réels, ce qui, d'un point de vue analytique, est correct puisque les nombres complexes sont une « extension » des nombres réels. Cette partie réelle correspondant à une fluctuation log-périodique de l'invariance d'échelle.

4.2.7.2. La version de Laurent Nottale (1997)

Si l'on revient à la théorie de la relativité d'échelle, il faut trouver une équation différentielle d'échelle donnant cette fluctuation log-périodique. La démonstration est plus compliquée que celle de l'invariance d'échelle, mais elle aura pour effet de satisfaire au principe de covariance : la dépendance d'échelle log-périodique aura la même forme mathématique, mais plus sophistiquée, que la dépendance d'échelle puissance.

Pour obtenir une telle fluctuation, il faut reprendre l'équation :

$$\frac{\mathrm{d}\,L(\varepsilon)}{\mathrm{d}\ln\varepsilon} - DL(\varepsilon) = 0.$$

On généralise cette équation en supposant que le deuxième membre n'est plus égal à zéro :

$$\frac{\mathrm{d}\,L(\varepsilon)}{\mathrm{d}\ln\varepsilon} - DL(\varepsilon) = \chi(\varepsilon).$$

Cependant, en vertu du principe de covariance, on exige que $\chi(\varepsilon)$ corresponde à une équation différentielle de la même forme que l'équation initiale.

On obtient donc :

$$\frac{\mathrm{d}\,\chi(\varepsilon)}{\mathrm{d}\ln\varepsilon} - D\chi(\varepsilon) = 0$$

où $D' = D + i\omega$.

Toutefois, D' correspond à une dimension fractale complexe. Pour trouver $L(\varepsilon)$, il faut dériver par le logarithme de la résolution l'équation $\frac{\mathrm{d}\,L(\varepsilon)}{\mathrm{d}\ln\varepsilon} - DL(\varepsilon) = \chi(\varepsilon)$, ce qui donne :

$$\frac{\mathrm{d}^2\,L(\varepsilon)}{(\mathrm{d}\ln\varepsilon)^2} - D\frac{\mathrm{d}\,L(\varepsilon)}{\mathrm{d}\ln\varepsilon} = \frac{\mathrm{d}\,\chi(\varepsilon)}{\mathrm{d}\ln\varepsilon}.$$

Dans cette équation, on remplace $\frac{\mathrm{d}\,\chi(\varepsilon)}{\mathrm{d}\ln\varepsilon}$ par sa valeur $D'\chi(\varepsilon)$, ce qui correspond, finalement à une équation différentielle du second ordre :

$$\frac{\mathrm{d}^2\,L(\varepsilon)}{(\mathrm{d}\ln\varepsilon)^2} - (D + D')\frac{\mathrm{d}\,L(\varepsilon)}{\mathrm{d}\ln\varepsilon} + (DD')L(\varepsilon) = 0.$$

Cette équation se résout très facilement car elle correspond à un modèle d'équation différentielle connu dont la solution est :

$$L(\varepsilon) = L_0\varepsilon^D(1 + b\varepsilon^\delta)$$

où $\delta = i\omega$

En posant cette équation sous sa forme trigonométrique, on obtient :

$$L(\varepsilon) = L_0\varepsilon^D(1 + b\cos(\omega\ln\varepsilon)) + i(L_0 b\varepsilon^D\sin(\omega\ln\varepsilon)).$$

Dans cette équation, on exige, tout comme dans le paragraphe précédent, que la partie imaginaire soit négligeable, et on obtient la correction log-périodique dépendante d'échelle :

$$L(\varepsilon) = L_0\varepsilon^D(1 + b\cos(\omega\ln\varepsilon)).$$

Autrement dit, le simple fait d'avoir un « plus un » supplémentaire par rapport à la formule de Didier Sornette suffit à la transformer en une relation dépendante d'échelle et obtenir une équation plus pratique. De plus, le paramètre b conditionne la nature de la loi log-périodique : si b est inférieure à 1, il s'agit d'une véritable correction, ce qui n'est plus le cas, s'il est supérieur à 1.

4.2.8. L'idée de « dynamique d'échelles »

Jusqu'à présent, seuls les cas où la dimension fractale était constante c'est-à-dire déduite de sa définition mathématique :

$$D(\ln \varepsilon) = -\frac{\mathrm{d} \ln L}{\mathrm{d} \ln \varepsilon}.$$

La dynamique d'échelles consiste à « inverser » l'étude des variations : plutôt que d'étudier les variations du logarithme de la variable dépendant de l'échelle par rapport à celle du logarithme des résolutions, on considérera les variations de cette variable par rapport à celle de la dimension fractale qui devient une variable appelée « djinn » (Nottale, 2001) permettant de déduire la résolution. Autrement dit, la dimension fractale varie de manière continue à travers l'espace des échelles, et non plus de manière discontinue comme c'était le cas dans les paragraphes précédents. Afin de ne pas alourdir les notations mathématiques, le « djinn » sera appelé τ.

$$- \ln \varepsilon = \frac{\mathrm{d} \ln L}{\mathrm{d} \tau}.$$

Cette formule peut être comparée de manière analogique à l'expression de la vitesse dans les lois du mouvement : $v = \frac{\mathrm{d} x}{\mathrm{d} t}$ (v la vitesse ; x la position ; t le temps). La logarithme de la résolution est donc une « vitesse d'échelles ».

Toujours de manière analogique, on peut dire que -ln(ε) est une vitesse d'échelle, ce qui permet alors de créer une « accélération d'échelles » Γ :

$$\Gamma = \frac{\mathrm{d}^2 \ln L}{(\mathrm{d}\tau)^2}$$

où tout comme les lois de la dynamique, l'accélération serait liée à une « force d'échelle » et à une « masse d'échelle ».

$$F = m\Gamma$$

La « dynamique des échelles » est loin d'être aussi simpliste, comme cela sera montré dans les chapitres suivants. Aussi, avant de conclure ce chapitre, il faut revenir sur une notion fondamentale tant dans le domaine géographique que dans celui de la relativité d'échelle, celle « d'échelles de coupure ».

4.2.9. Les échelles de coupure

Dans les exemples précédents, des échelles de coupure peuvent être clairement définies. Elles sont au cœur de la relativité d'échelle. Il en existe deux sortes. La première renvoie à la limite physique de la méthode de calcul comme la dimension fractale de boîtes. En effet, une fois que la boîte devient trop grande par rapport à l'objet mesuré, un nombre constant apparaît : 1, de même, la boîte peut devenir trop petite et atteindre la taille d'un pixel physique par exemple, et un nombre maximum N_{max} apparaît. On a donc deux échelles de coupure : une minimale ε_{min} et une maximale ε_{max}.

Toutefois, un second type d'échelle de coupure peut être dégagé lorsqu'il existe des brisures de symétrie. Déterminer de manière précise ce type d'échelle de coupure est une nouveauté de la relativité d'échelle. Dans le cadre d'une même méthode de calcul, il se peut que l'on observe différente transition fractal - non fractal par exemple, ce qui permet d'identifier des niveaux d'organisation. Autrement dit, cibler les échelles de coupure est une stratégie très importante pour l'étude des formes en géographie.

En effet, l'échelle engendre la limite, ce qui règle la question de la taille. De ce fait, tant que l'on n'est pas à la bonne échelle, on ne peut pas percevoir la limite de l'objet géographique, donc de sa forme. « Le monde des géographes est avant tout un monde de formes… » résume André Dauphiné (2003, p. 148). Les échelles de coupure sont donc essentielles, car le projet scientifique de la géographie est d'expliquer les formes déployées de (ou sur) l'interface terrestre (Martin, 2004). Autrement dit, l'idée clé de la géographie est de prétendre que la position dans l'espace, au sens très général du terme, n'est pas neutre et qu'il a un sens, ce qui revient souvent à étudier le rapport entre le continu et le discontinu. Celui-ci est l'adage de toute science. La physique, par exemple, étudie les deux : une première approche est presque toujours discrète (discontinue) et une seconde est continue par l'établissement d'une fonction analytique. En géographie, l'étude des formes nécessite une approche par la limite des objets géographiques. Quelle est la limite d'une montagne, d'un bassin versant, d'une ville, *etc.* ? Cela signifie que la géographie étudie, avant tout et de manière essentiellement phénoménologique, les discontinuités spatiales, à savoir comment tel objet se différencie de tel autre ? (Brunet, 1968) Ces discontinuités peuvent généralement être identifiées par une approche multi-échelle qui permet de caractériser l'espace géographique.

4.3. Retour sur la nature de l'espace géographique

À la lumière des réflexions précédentes, il devient logique, voire trivial, de penser que l'espace géographique au sens large du terme est fractal. Ainsi, toute structure géographique d'origine naturelle et/ou anthropique est évidemment fractale, car son existence dépend de la résolution de l'espace considéré, mais toutes les études géographiques ne sont pas systématiquement fractales. Par exemple, une étude des acteurs ou de l'importance politique d'un objet ne l'est pas, du moins explicitement.

Nombreuses sont les études fractales en géographie humaine et en géographie physique, mais elles mènent généralement à des impasses, car beaucoup de ces études associent invariance d'échelle et autosimilarité (Moussa et Bocquillon, 1993 ; Batty et Longley, 1994 ; Frankhauser, 1994 ; Rodríguez-Iturbe et Rinaldo, 1997, *etc.*). Il est clair que si le monde était autosimilaire, toutes les structures spatiales l'organisant se répèteraient à l'infini, or il n'est pas nécessaire d'être un scientifique pour constater que la morpholo gie d'une ville, par exemple, ne ressemble pas à celle des continents à l'échelle terrestre. Le simple fait de changer de niveau et/ou de résolution transforme l'objet étudié. Autrement dit, un changement d'échelle n'est jamais neutre. Etudier cette ville à une résolution de 1 centimètre représente 40 kilomètres n'est pas la même étude morphologique qu'à l'échelle 1 centimètre représente 50 mètres. C'est une évidence, mais, dans les analyses, peu de géographes prennent en considération ce phénomène qui, pourtant, fut mis en évidence par Roger Brunet (1968, p. 77) et par Marie Piron (1993). L'échelle géographique n'est donc pas un simple rapport homothétique (Volvey, 2005). En effet, elle définit la limite physique des objets géographiques. À l'échelle continentale, une ville n'est qu'un cercle, mais si on zoome continûment de manière infinitésimale comme le suggère la relativité d'échelle, sur ce cercle à une échelle plus fine, peu à peu de nouvelles structures vont émerger (réseau urbain dans lequel est plongé cette ville, puis sa morphologie propre). Un lien peut donc être établi entre les limites des objets géographiques et leur échelle cartographique. Ce qui compte alors pour une étude géographique n'est donc pas de trouver une résolution plus fine mais de comprendre l'organisation en échelle de ces structures car changer d'échelle implique à la fois un gain et/ou une perte d'informations. Le niveau d'étude choisi est donc fondamental. Ce n'est pas un gadget. L'action (l'aménagement) menée à une échelle donnée peut donc se propager de manière positive dans d'autres niveaux, mais trop souvent de manière négative. Par exemple, à petite échelle l'aménagement du Rhône était une nécessité pour mieux contrôler les inondations saisonnières, mais à grande échelle, la construction des différents barrages a rendu le bilan sédimentaire de la Camargue négatif, ce qui fait qu'elle est condamnée à disparaître (Miossec, 1998). Il ne suffit pas de penser uniquement à l'échelle humaine pour résoudre un problème.

L'espace géographique au sens large du terme est donc un espace fractal. Il peut aussi être plongé dans un temps fractal, ce qui donne un espace-temps fractal. En réalité, il existe quatre couples possibles entre le temps et l'espace : (1) temps fractal - espace non fractal ; (2) temps fractal - espace fractal ; (3) temps non fractal - espace non fractal ; (4) temps non fractal - espace fractal. Ce qu'enseigne la relativité est que, si l'on voulait modéliser la réalité, il faudrait avoir une résolution infinie, or elle est malheureusement finie. Autrement dit, un modèle aussi sophistiqué soit-il est limité par sa résolution de référence. Il convient donc de comprendre comment passer d'une échelle grossière à une échelle plus fine, plutôt que de rechercher une échelle de référence absolue qui n'existe pas. Les échelles sont relatives, comme le temps et comme les longueurs. Il faut nécessairement étudier les lois qui organisent l'emboîtement du monde et dans le monde.

On peut donc dire que l'effet d'échelle en géographie n'est ni plus ni moins qu'une conséquence de la fractalité évidente des objets géographiques. Que l'on soit en géographie humaine ou que l'on soit en géographie physique, tout objet géographique que l'on cherche à caractériser *via* une analyse spatiale dépend de l'échelle de référence dans laquelle on caractérise l'objet. La quasi-totalité des variables de la géographie humaine sont elles-mêmes fractales. Par exemple, nombreux sont les travaux montrant que les indicateurs économiques comme le P.I.B. obéissent à des lois d'échelle. D'autres variables plus classiques comme la densité de population restent dépendantes de l'échelle. En géographie physique, la fractalité des montagnes, des cours d'eau, *etc.* est un peu mieux connue. Elles participent à l'explication de l'organisation hiérarchique spatiale du domaine concerné. Toutefois, dans les différentes approches menées en géographie humaine ou physique, la fractalité est souvent vue, à tort, comme une cause, ce qui conduit généralement à une impasse conceptuelle et une impossibilité de mise en pratique. On obtient alors des résultats idiographiques : « J'ai calculé la dimension fractale de telle montagne ou telle ville » par exemple. La première question d'un néophyte sur ce calcul serait « Et alors ? ». Le chercheur ne saurait quoi répondre. En relativité d'échelle, c'est très différent, d'une part parce que l'on ne calcule pas <u>la</u> dimension fractale, mais <u>une</u> dimension fractale, d'autre part parce que la fractalité devient une conséquence de la dépendance d'échelle, donc un support d'analyse fondamental qui permet de prendre en considération réellement la structuration d'un objet dans l'espace des échelles (ou des résolutions). L'analyse multi-scalaire prend alors un sens nouveau. Désormais, avec la relativité d'échelle, on pourra étudier l'emboîtement d'échelle d'un objet à travers plusieurs cartes d'échelles différentes - il en faudrait au moins une dizaine pour comprendre l'organisation scalaire. Ainsi, la géographie aura (enfin) une totale maîtrise de l'effet d'échelle et pourra beaucoup mieux l'appréhender.

Notes

[1] Dans cette thèse, l'expression « non autosimilaire » sera préférée à « autosimilarité statistique », car « non autosimilaire » semble plus parlant que « autosimilarité statistique ».

Partie 2. Morphométrie en géographie