

La réflexion sur l'analyse spatio-temporelle à partir du cas bovois

L'avantage de la base de données « Catiau », malgré toutes ses imperfections, est qu'elle permet de mener une analyse diachronique sur le long terme. Dans ce chapitre, seul le cas de Boves (80), village proche d'Amiens (80), sera traité.

12.1. Le temps et la loi d'évolution de Laurent Nottale (2000)

Les données historiques et/ou archéologiques étant incertaines, la connaissance de la date de construction, ou de destruction, d'une motte, ou d'un château, peut varier de l'année près au siècle près. Il est donc plus simple de cartographier le nuage des mottes et châteaux que d'établir la répartition temporelle. Pour y remédier, ce temps historique peut être modélisé par l'intermédiaire de la loi chronologique log-périodique d'évolution de Laurent Nottale (*et alii*, 2000 ; 2002), à savoir :

$$T_n = T_C + (T_0 - T_C)g^{-n} \text{ où } g = k^{\frac{1}{D}}$$

avec k entier si le nombre d'embranchements (choix potentiels à chaque bifurcation du système) reste constant à chaque étape et si D est une dimension fractale valant 2 (Mandelbrot, 1977) qui relie le rapport d'échelle au nombre d'embranchements, et T_0 l'origine de l'évolution considérée déterminée par un événement arbitrairement choisi à $n = 0$.

Il s'agit d'une loi phénoménologique puisqu'elle est restreinte à des phénomènes particuliers. Avant d'appliquer l'équation, il faut caler les données avec trois dates. Ce calage consiste à calculer g et T_C à partir des premières dates. Il faut préciser que

$$T_{n+1} = \frac{T_C(g-1) + T_n}{g} \text{ et } T_{n-1} = T_C + g(T_n - T_C)$$

Autrement dit, la série chronologique est déterminée par l'origine spatio-temporelle que l'on a choisie. On calcule ensuite g et T_C entre n et $n+1$ de la manière suivante :

$$T_C = \frac{gT_{n+1} - T_n}{g-1} = \frac{T_{n+1}^2 - T_n T_{n+2}}{2T_{n+1} - T_n - T_{n+2}}$$

$$g = \frac{T_{n+1} - T_n}{T_{n+2} - T_{n+1}} = \frac{T_n - T_C}{T_{n+1} - T_C}$$

Ce type d'équation n'est pas exceptionnel en soi. Elle porte le nom de convergence géométrique. Ce point présente la particularité d'être super stable. Il faut toutefois insister sur le fait que le cœur de cette loi est le rapport g . Celui-ci est un rapport d'intervalles constant qui caractérise une invariance d'échelle.

Il faut également préciser que les lois log-périodiques sont des lois périodiques dans un espace logarithmique. Elles peuvent correspondre à des accélérations, à des décélérations ou à des lois périodiques normales (dans le cas où $g = 1$).

Dans la pratique, il faut ajuster numériquement g et T_C par une méthode d'estimation statistique comme celle des moindres carrés. On peut utiliser aussi comme estimateur statistique la variable t de Student dans un tirage de Monte-Carlo (Figure 99).

12.1.1. L'archétype temporel de Boves

Aujourd'hui, l'exemple de Boves sert toujours d'archétype. Le site archéologique de Boves se situe à huit kilomètres au sud-est d'Amiens. Il est essentiellement d'époque médiévale et il fait l'objet d'une étude très approfondie depuis treize ans (Racinet, 1996-2009). C'est un complexe castral constitué d'une motte, d'un château et de bâtiments d'habitation et/ou ecclésiastiques (Racinet et Drouin, 2002 ; Racinet et Schwerdroffer, 2004).

C'est bien sûr grâce à tous les travaux existant sur ce site que cette étude a pu être possible et réalisée. Ainsi, dix « dates remarquables » ont été retenues pour construire le modèle. Les quatre premières ont été choisies en fonction des données archéologiques. 920 et 960 correspondent aux deux premières structures en bois construites sur la motte ; on peut estimer la barre d'erreur à plus ou moins 25 ans. Vers 1025, les occupants ont mis en place une structure mi-pierre, mi-bois ; la barre d'erreur est également de plus ou moins 25 ans. Vers 1140, ils commencent à bâtir le premier château à proprement dit, avec une barre d'erreur de plus ou moins 20 ans. Par l'étude d'Olivier Leblanc (2003), on sait que la motte est ensuite occupée de manière continue. Le château connaît alors plusieurs transformations et reconstructions.

Les six dernières dates sont obtenues à partir de sources historiques déjà exploitées. Entre 1360 et 1380, les ducs de Lorraine reconstruisent le château. Vers 1604, ce dernier château fut détruit, ce qui déboucha sur une occupation de moins en moins intensive. Du XIX^e au XXI^e siècle, le site fut réactivé en 1870, lors de la guerre franco-allemande puis en 1914-1918, lors de la première guerre mondiale et enfin en 1939-1945, lors de la seconde guerre mondiale. À partir de 1997 débutèrent les fouilles archéologiques. Une simplification a été réalisée afin de résumer les quatre dernières dates entre la fin du XIX^e siècle et le XX^e siècle en une seule. En effet, leur connaissance précise n'est due qu'à la proximité temporelle que nous avons par rapport à elles. Aussi, ces quatre dates ont été « résumées » par la date 1945 qui est symbolique de la fin des guerres franco-allemandes et du début de la construction européenne. De plus, la dernière trace « en dur » (un bloc de béton armé) laissée sur le chantier date de cette époque.

n	Date réelle	$g(n, n + 1, n + 2)$	$T_C(0, n)$	$T_C(0, n)$	$\ln(T_n - T_C)$
BIFURCATION					
0	920 ± 25				1,32
1	960 ± 25	0,62 ± 0,88	856,00	856,00	1,32
2	1025 ± 25	0,57 ± 0,46	870,71	875,50	1,78
3	1140 ± 20	0,52 ± 0,19	883,34	899,05	2,10
4	1360 ± 1	0,90 ± 0,90	62,47	-876,67	2,66
BIFURCATION					
5	1604 ± 1	0,72 ± 0,01	762,08	746,23	2,85
6	1945 ± 1				3,02
BIFURCATION ?					

Figure 98. Les dates calendaires observées et premières estimations de g et T_C

La Figure 98 donne une première estimation de g et deux estimations de T_C . Elle montre une décélération (Cash *et alii*, 2002). Toutefois, les barres d'erreurs ont été sans doute surestimées dans ce cas.

Après plusieurs tests manuels, on trouve une valeur g comprise entre 0,56 (de n_0 à n_4) et 0,68 (de n_5 à n_6). La différence des valeurs s'explique sans doute par la présence d'une bifurcation entre n_4 et n_5 (Figure 98). Laurent Nottale a confirmé ces résultats en effectuant un tirage de type Monte Carlo afin d'ajuster g et T_C en utilisant l'estimateur statistique de la variable t de Student (fig. 30). On constate que pour $g \approx 0,56938$ on observe un pic de la variable t de Student avec un $T_C \approx 870$ pour les cinq premières dates de la série. Il n'y a qu'une chance sur 50 000 d'obtenir ces résultats au hasard.

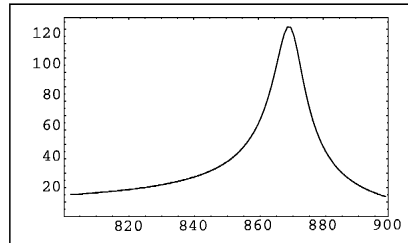


Figure 99. L'ajustement de g et de T_C par un tirage Monte-Carlo (communication personnelle de Laurent Nottale)

La valeur de T_C est donc voisine de 870. Cette valeur n'est pas aberrante, ni pour l'historien, ni pour le géographe, puisqu'il s'agit du moment où l'empire carolingien se désagrège.

La fonction de bifurcation $f(x)$ varie comme la fonction $(|T - T_C|)^m$ où m est le nombre de bifurcations (Figure 100). Le problème est que dans le cas de Boves m n'est pas constant, d'où la nécessité de diviser la courbe en au moins deux parties : dans la première, $m = 3$, dans la seconde $m = 2$. La rupture de pente de la courbe peut être interprétée, aussi comme une bifurcation.

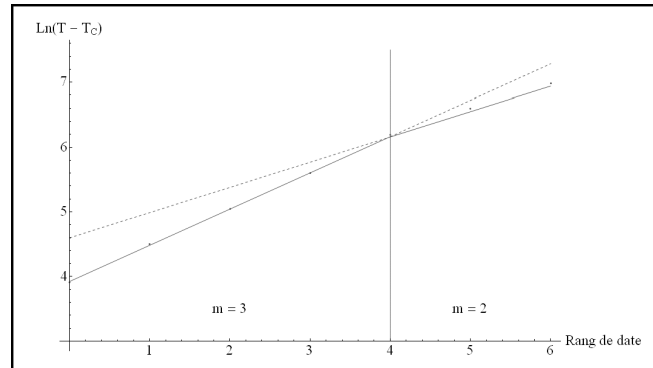


Figure 100. La relation entre le rang et le $\ln(T_n - T_C)$

La Figure 101 présente les dates théoriques obtenues à partir des valeurs de g et de T_C choisies, réinjectées dans l'équation de l'évolution.

n	Date théorique	g optimisé	$\ln(T_n - T_C)$
BIFURCATION			
0	920		1,70
1	959	0,56	1,95
2	1028	0,56	2,20
3	1150	0,56	2,45
4	1366	0,56	2,70
BIFURCATION			
5	1600	0,68	2,86
6	1944	0,68	3,03
BIFURCATION ?			

Figure 101. Les dates théoriques obtenues par l'équation de l'évolution

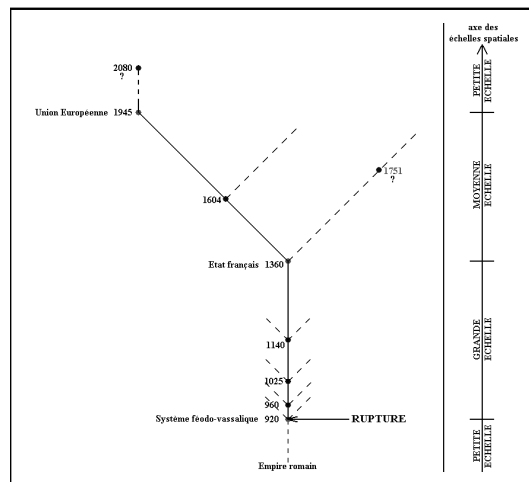
On constate ainsi qu'après chaque bifurcation supposée, le nombre d'embranchements, c'est-à-dire en fait l'ampleur du choix, diminue. Il passe de trois à deux. Puis, si on prend comme date suivante 2080 ± 30 dans le cadre d'une étude du rythme économique, crise - non crise, dans les sociétés occidentales (Nottale *et alii*, 2000), il passe de deux à un. Ce qui, en soi, pour une occupation d'un site archéologique, c'est-à-dire un site qui a subi une « extinction », est très logique.

De plus, d'un point de vue purement mathématique, on remarque que si $D = 2$ alors :

$$\left(\frac{g_1}{g_2}\right)^2 = \left(\frac{0,68}{0,56}\right)^2 \approx 1,47 \approx \frac{3}{2}$$

ce qui correspond bien à l'hypothèse des trois embranchements qui sont portés au nombre de deux après la bifurcation temporelle.

La Figure 102 montre le nombre de choix d'évolutions possibles. Au début, il y a une rupture entre l'empire carolingien et le système féodal, marquée par une désagrégation spatiale. De 920 à 1360, il y a, à chaque « moment historique » trois branches possibles donc trois futurs potentiels dont seulement un se réalisera. Cela étant, le système ne semble avoir réellement bifurqué qu'à partir du moment où le nombre de choix possibles s'est réduit à deux (en 1360). La bifurcation peut s'expliquer par l'intégration définitive, à une échelle plus petite, du site de Boves dans l'Etat français en construction.

Figure 102. L'arbre de l'évolution spatio-temporelle du site de Boves de la fin de l'empire carolingien au XXI^e siècle

Si l'évolution s'était poursuivie autrement (absence d'État français par exemple), l'étape suivante de construction aurait eu lieu, sur la motte, vers 1751 (?). Quelle forme cette césure aurait-elle pu prendre ? Quelle nouvelle structure territoriale aurait pu, là, prendre naissance ? Nous ne le savons pas mais certains *scenarii* pourraient être échafaudés.

Rappelons qu'après 1748, année du traité d'Aix-la-Chapelle, et la constitution de la Prusse et de l'Autriche « la possibilité d'une hégémonie française sur l'Europe disparaît » (Duby, 1971, t.3, p. 246). La France devra ensuite ferrailer d'abord pendant la Révolution, puis entre 1869 et 1870, puis entre 1914 et 1918 puis enfin entre 1939 et 1945 pour assurer son existence.

La seconde bifurcation a lieu en 1945, si on prend comme $T_c = 2080 \pm 30$, et si on considère comme recevables les résultats de Laurent Nottale *et alii* (2000). Là, il n'y a plus qu'un choix possible. L'évolution du site n'a plus qu'une possibilité, qu'une branche. Tout comme les états antérieurs, cela peut s'expliquer par l'intégration européenne. Il ne présente plus aucun intérêt quels que soient les niveaux considérés, sauf au niveau scientifique. À partir de là, il n'est pas impossible de penser que le site de Boves restera dans son état actuel : c'est-à-dire à l'abandon jusqu'à la prochaine rupture (2080 ?) qui peut être lui redonnera un intérêt stratégique.

12.1.2. Bilan et perspective

Pour finir, il faut préciser que, pour l'ensemble des séries temporelles, trois cas sont possibles (lorsqu'il existe au moins trois dates connues) : (1) l'accélération ; (2) la décélération ; (3) l'oscillation non amortie. À la vue des données déjà recueillies, les trois possibilités semblent exister. Toutefois, la qualité des données temporelles étant ce qu'elle est, elle ne permet pas la réalisation d'une chronologie aussi précise que celle du château de Boves. Les dates sont incertaines ; beaucoup de dates ont une barre d'erreur de 200 ans. Aussi mener une analyse temporelle généralisée aux 1 412 autres sites semble fastidieux par rapport à la qualité des données. Seule l'analyse spatiale donne des résultats exploitables.

12.2. L'espace

Cela étant, l'approche de Laurent Nottale demeure avant tout temporelle. Aussi, faut-il la compléter par une analyse spatiale (Nottale, 1993 ; Nottale *et alii*, 2000, p. 350-353). L'analyse radiale a été retenue pour la réaliser en première approche.

12.2.1. La méthode de l'analyse radiale

Afin de mener à bien cette réflexion, il faut partir d'une première approximation en supposant que le nombre de châteaux recensés dans la fenêtre étude n'a pas varié au cours du temps, ce qui implique que la distribution se serait cristallisée entre le X^e et le XIII^e siècle, ce qui est historiquement très discuté, comme ce sera montré dans le chapitre 14.

La méthode est assez simple (Martin, 1997 ; 2003b). On calcule une succession de densités de châteaux en fonction de la surface des anneaux formés par des cercles dont le centre est un château localisé.

On reporte ensuite les valeurs sur un graphique avec en abscisse le rayon maximal de l'anneau et en ordonnée le rapport : $\frac{\text{nombre de châteaux}}{\text{surface de l'anneau}}$, c'est-à-dire la densité de châteaux dans un anneau. Cependant, cette méthode présente des effets de bords non négligeables, car les anneaux ne sont jamais complets et leur surface croît en fonction de la distance au centre. De plus, il dépasse rapidement les frontières de la fenêtre d'étude. Autrement dit, certains anneaux ne sont jamais complets ! Cela peut engendrer une diminution virtuelle de la densité. Ainsi, les premiers résultats obtenus en 2005 (Forriez, 2005 ; Forriez et Martin, 2008, Martin et Forriez, 2008) sont complètement biaisés. La Figure 103 illustre le problème : à partir du cinquième anneau, les sites connus ne couvrent pas toute la surface de l'anneau. Il faut noter qu'il est spécifique à l'analyse radiale : si on avait choisi des carrés, comme dans une analyse fractale par comptage de boîtes carrées, il n'y aurait aucun effet de bord.

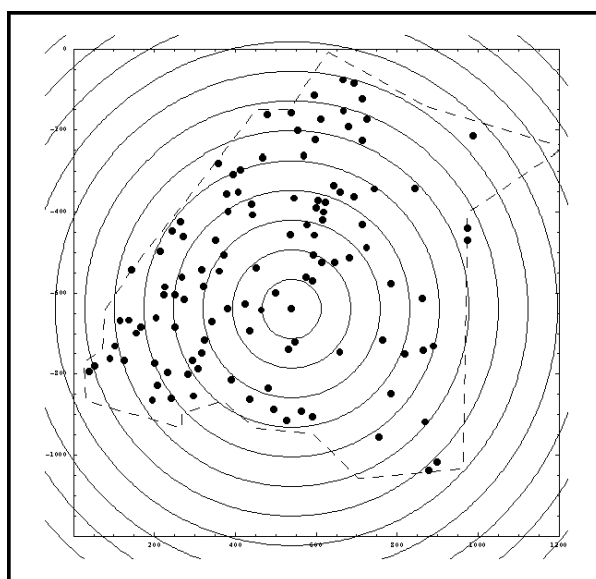


Figure 103. Exemple d'analyse radiale avec pour centre le château de Boves (communication personnelle de Laurent Nottale)

Réalisée sous *Mathematica* 4 par Laurent Nottale (juin 2006) avec l'ancien nuage de points (Forriez, 2005)

Ainsi, une méthode de correction de ces effets de bord a été mise au point. C'est ce que Laurent Nottale a appelé « méthode de la baignoire » (juin 2006). Pour l'illustrer, l'utilisation de la représentation cartographique de l'ensemble de la base « catiau » apparaît très intéressante (Figure 104). La méthode se décompose en trois étapes :

1. encadrer le nuage de points (Figure 105). Dans ce cas, les frontières sud et est sont purement virtuelles ; elles sont dues au choix de la fenêtre territoriale. Il faut noter qu'un petit rajout a été effectué à l'est pour prendre en compte la totalité des sites correspondant aux limites de la Picardie des XIV^e-XV^e siècle. Au nord, les sites belges n'ont pas pu être pris en compte, car les bases de données et les dictionnaires des châteaux sont franco-français. La frontière franco-belge crée une limite artificielle. Enfin, à l'ouest, la Manche crée une limite naturelle dont le trait de côte a été ici très grossièrement tracé ;
2. créer une distribution aléatoire de points dans cet encadrement ;
3. effectuer deux analyses radiales avec pour centre l'un des sites de la distribution analysée : l'une avec la distribution observée, l'autre avec la distribution aléatoire dans chaque anneau le rapport entre le nombre de points de la distribution aléatoire et le nombre de points de la distribution observée varie comme celui entre la densité aléatoire et la densité observée. On obtient ainsi une densité relative dont la variation permet de juger si la densité réelle, qui demeure inconnue, varie en fonction de la distance au centre ou reste constante.

Démonstration.

Soit un anneau dont la surface S_T est connue. Toutefois, la distribution des points est concentrée sur une surface inconnue S_R dans cet anneau.

Soit $\rho_R = \frac{N_R}{S_R}$ correspondant à la densité réelle du nombre de points sur la surface S_R .

Cependant, on ne peut estimer que $\rho_{obs} = \frac{N_R}{S_T}$ puisque S_R est inconnue. En effet, si l'anneau était complet, on aurait $\rho_C = \frac{N_C}{S_T}$.

Le remplissage de l'anneau correspond alors à :

$$\begin{aligned} \frac{S_R}{S_T} &= \frac{\frac{N_R}{\rho_R}}{\frac{N_C}{\rho_C}} = \frac{\rho_C}{\rho_R} \times \frac{N_R}{N_C} \\ \implies \frac{N_R}{S_R} \frac{S_R}{S_T} &= \rho_C \frac{N_R}{N_C} \\ \implies \frac{N_R}{S_T} &= \rho_C \frac{N_R}{N_C} \\ \implies \rho_R &= \rho_C \frac{N_R}{N_C} \end{aligned}$$

La densité observée est proportionnelle à la densité réelle. Toutefois, cette densité réelle reste inconnue. On crée alors une densité aléatoire de référence $\rho_A = \frac{N_A}{S_T}$ proportionnelle à la densité réelle.

$$\rho_C \propto \rho_{obs} \frac{N_A}{N_R}$$

Dans le cas de la Figure 105, la table de référence comporte, au total, 7 263 lieux aléatoires.

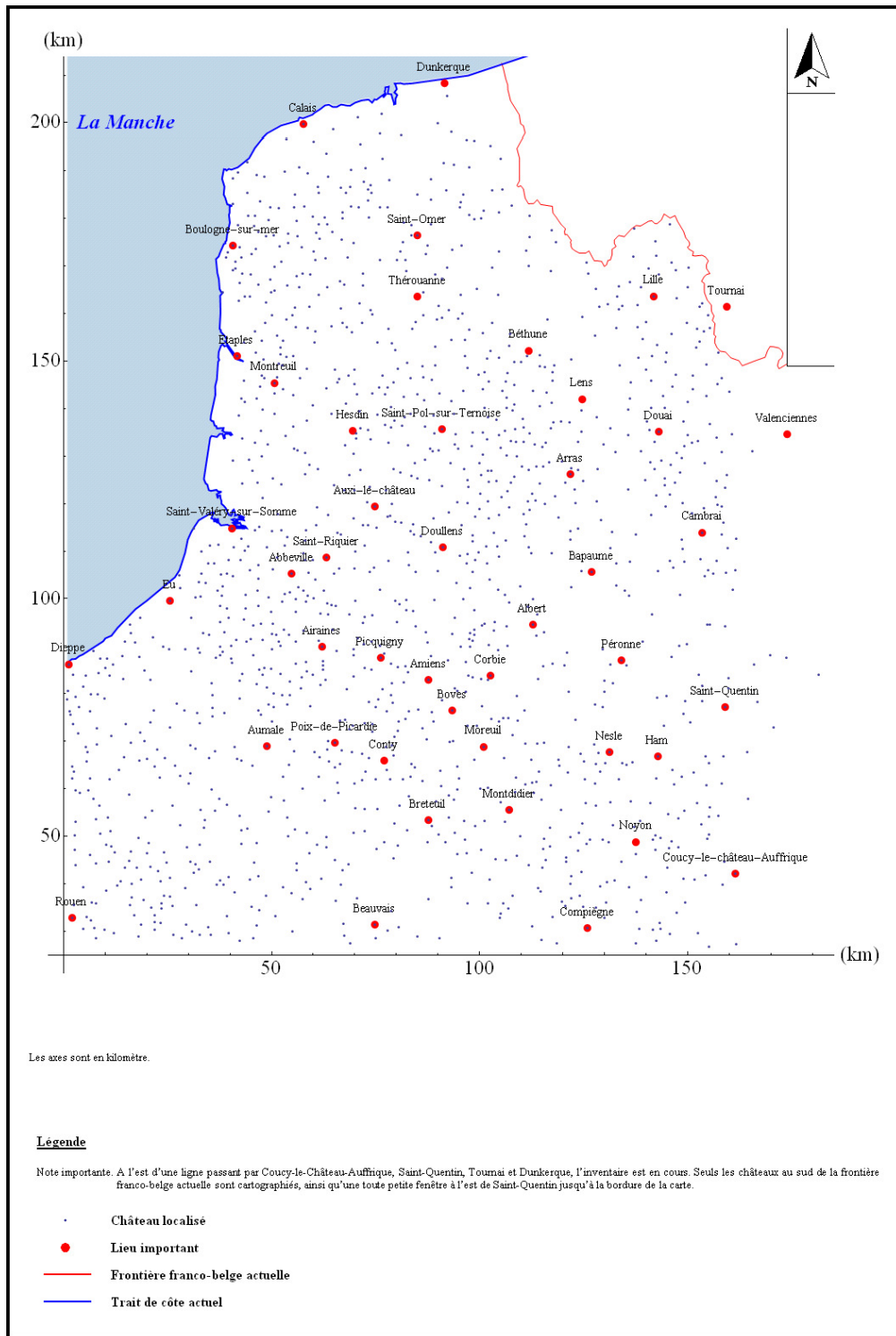


Figure 104. Nuage de points des châteaux connus

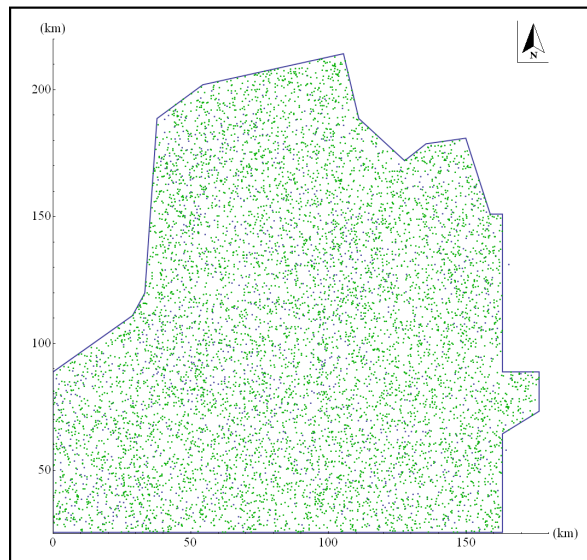


Figure 105. Encadrement du nuage de points

Point vert = point aléatoire ; point rouge : site dans un hameau ; point bleu : site dans une commune centre

12.2.2. Exemple de la répartition des châteaux autour de Boves

Étant donné qu'il existe 1 413 sites identifiés et 3 738 communes centres et hameaux, il est nécessaire de présenter davantage la méthode que l'ensemble des résultats. L'exemple choisi est bien évidemment l'étude de la répartition des châteaux autour du site de Boves.

Pour cela, on applique la méthode décrite précédemment. Quel que soit l'intervalle entre les anneaux choisi, la distribution entre le rayon maximal de l'anneau et le nombre de châteaux connu dans l'anneau semble correspondre à une gaussienne centrée autour de 75 km, si l'on excepte les cas des intervalles 100 km et 130 km où les anneaux sont trop grands pour être centré sur cette valeur (Figure 106). La densité de châteaux par anneaux croît rapidement du premier anneau vers un certain anneau, puis décroît beaucoup moins rapidement vers le dernier anneau (Figure 106). De même, on observe des résultats analogues pour les lieux aléatoires (Figure 107). Par contre, le rapport entre le nombre de lieux aléatoires par anneaux et le nombre de châteaux par anneaux est constant d'un intervalle à l'autre (Figure 108). Autrement dit, la densité autour du château de Boves est constante. L'espace étudié est donc isotrope en ce point.

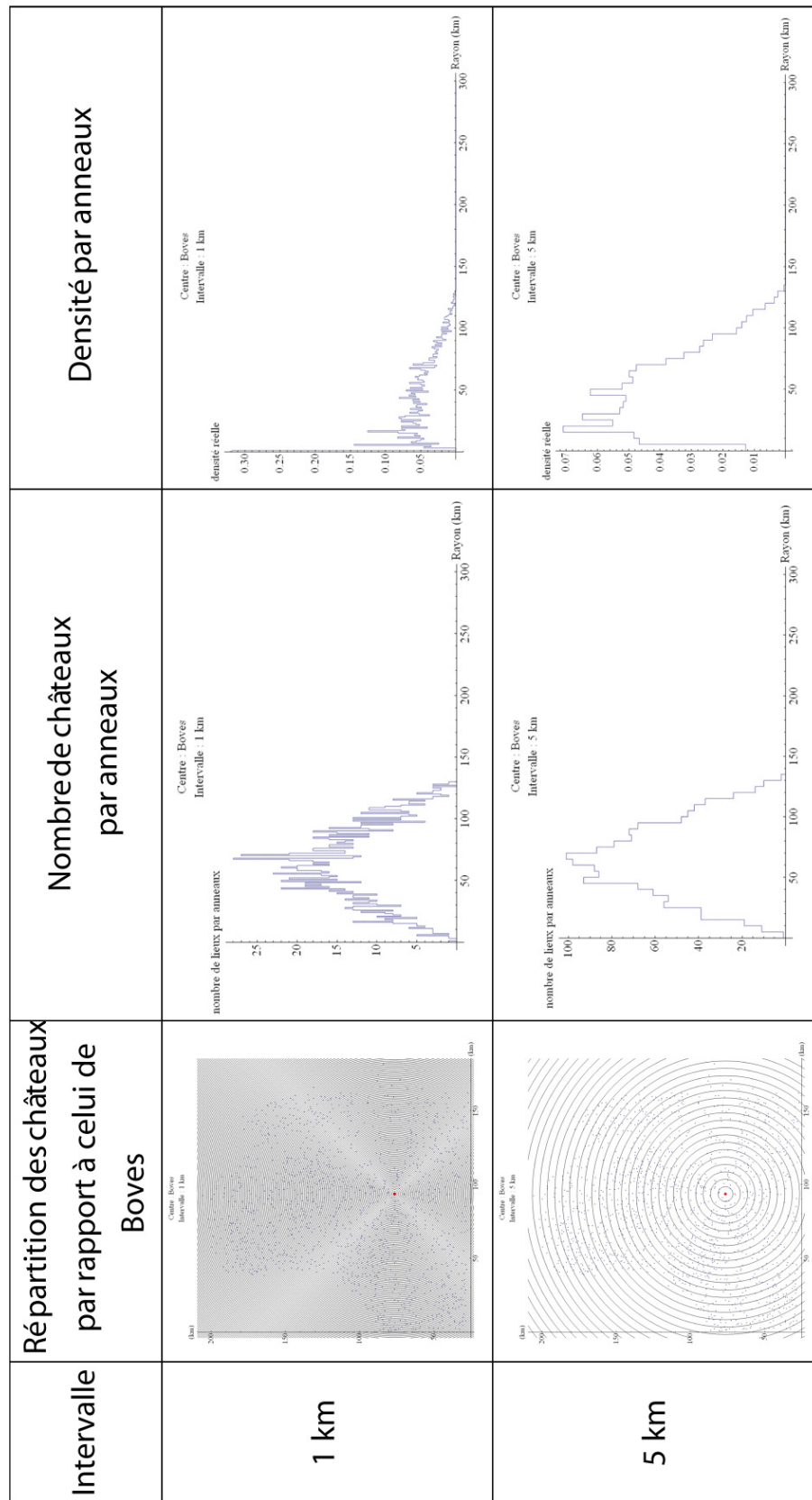


Figure 106-1. Tableau de synthèse de la répartition des châteaux autour de Boves

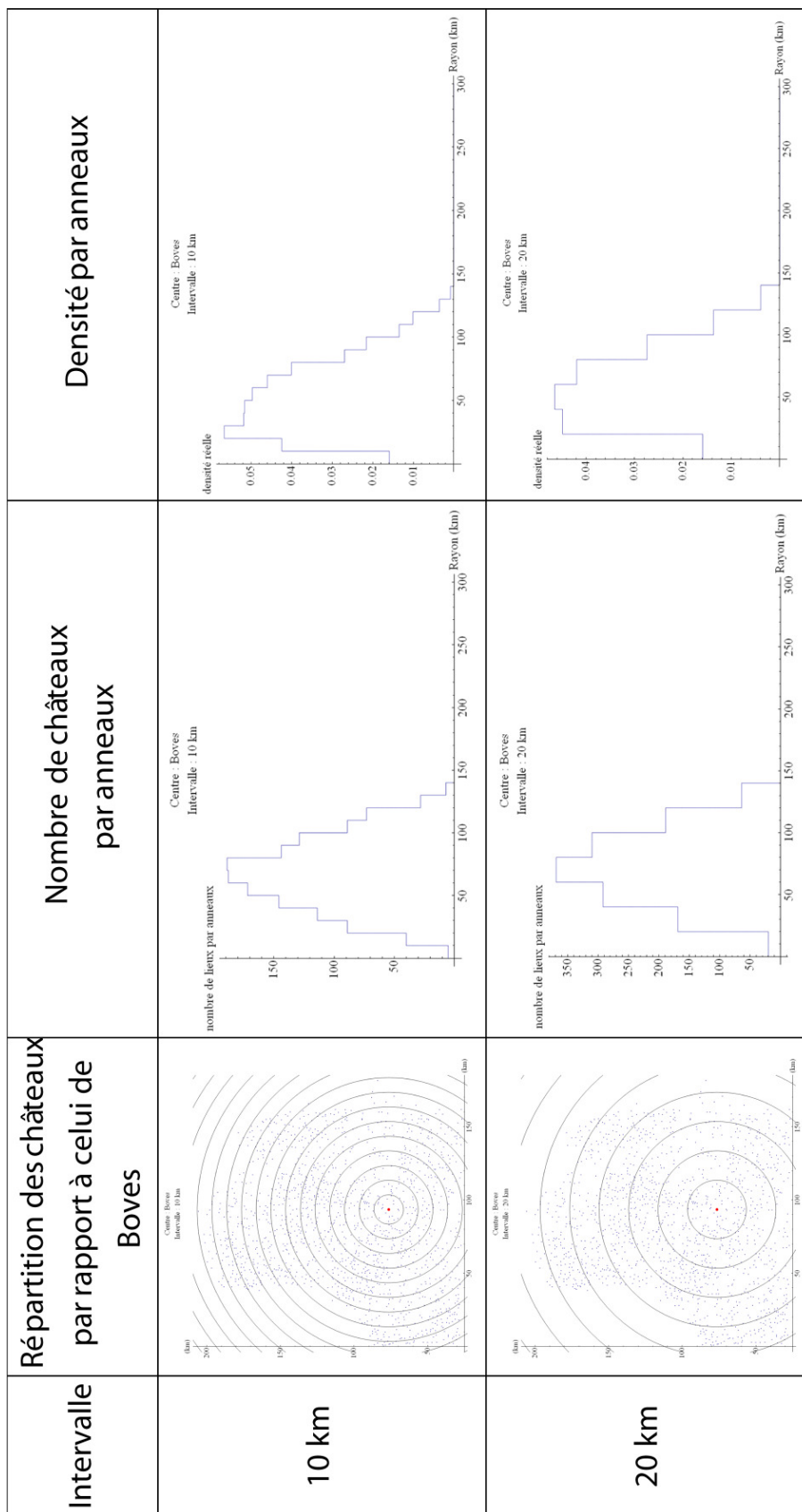


Figure 106-2. Tableau de synthèse de la répartition des châteaux autour de Boves

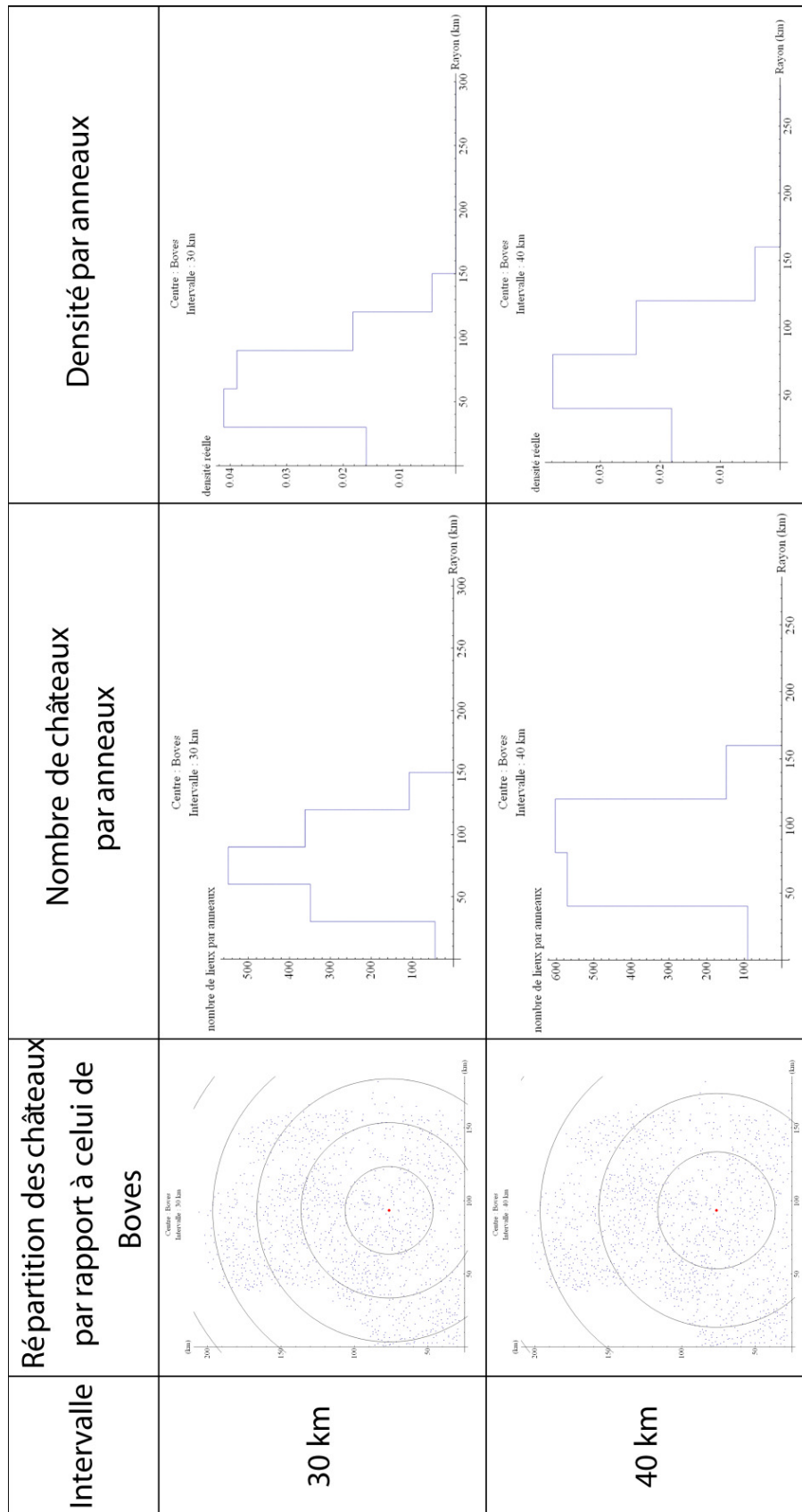


Figure 106-3. Tableau de synthèse de la répartition des châteaux autour de Boves

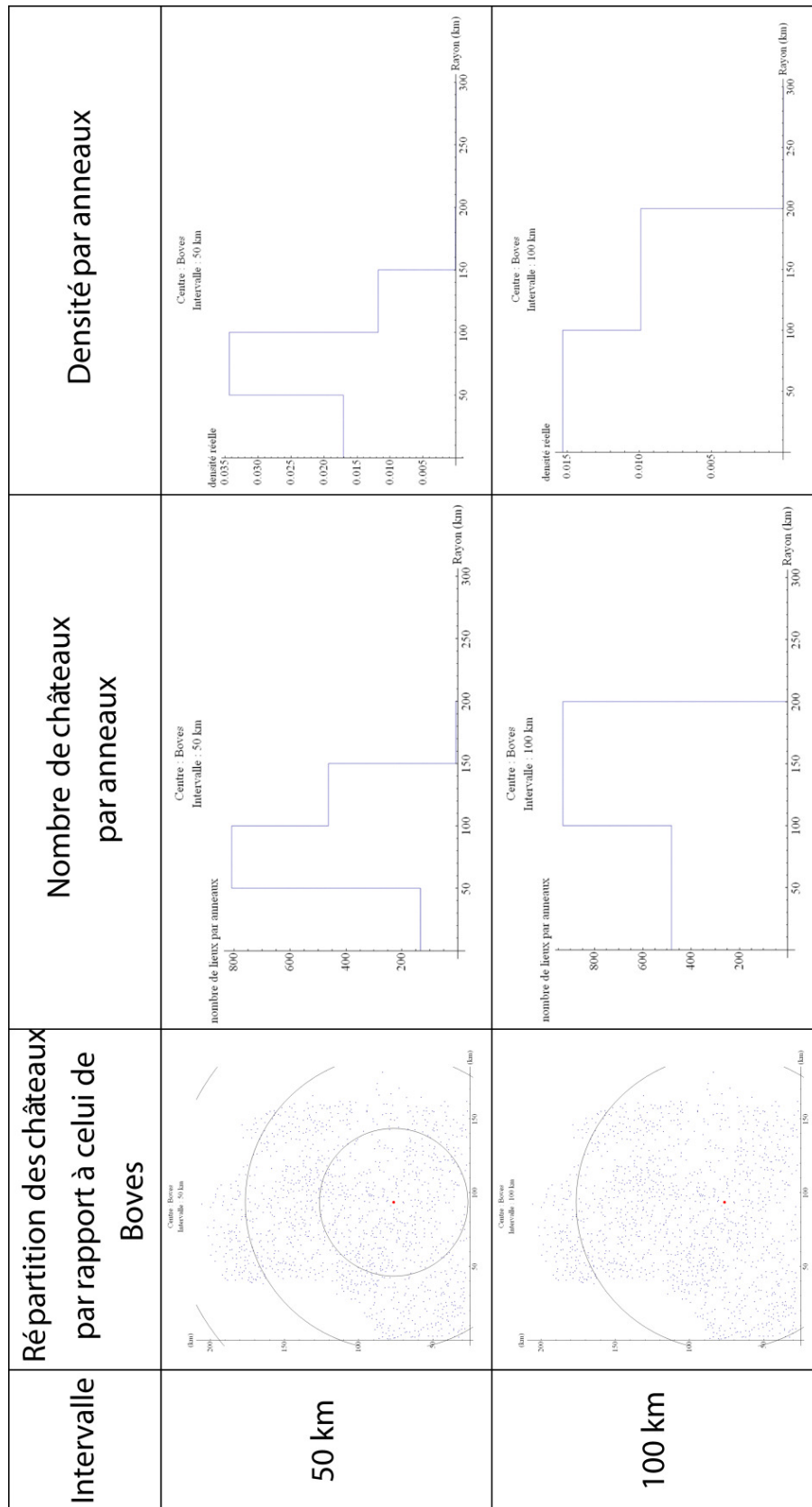


Figure 106-4. Tableau de synthèse de la répartition des châteaux autour de Boves

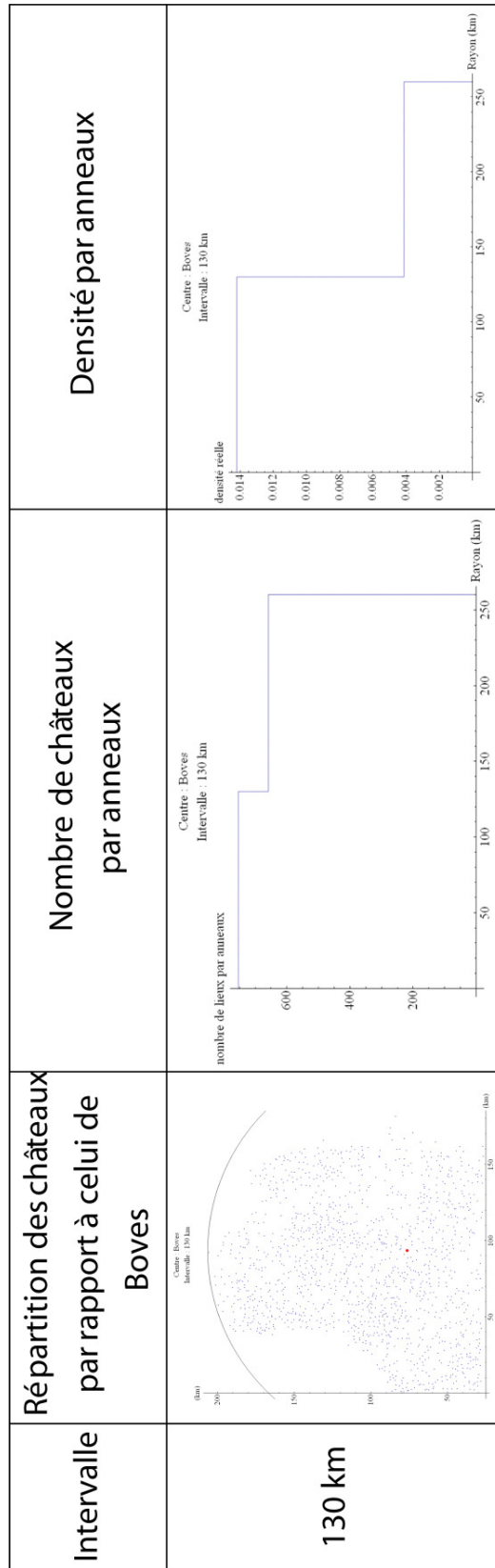


Figure 106-5. Tableau de synthèse de la répartition des châteaux autour de Boves

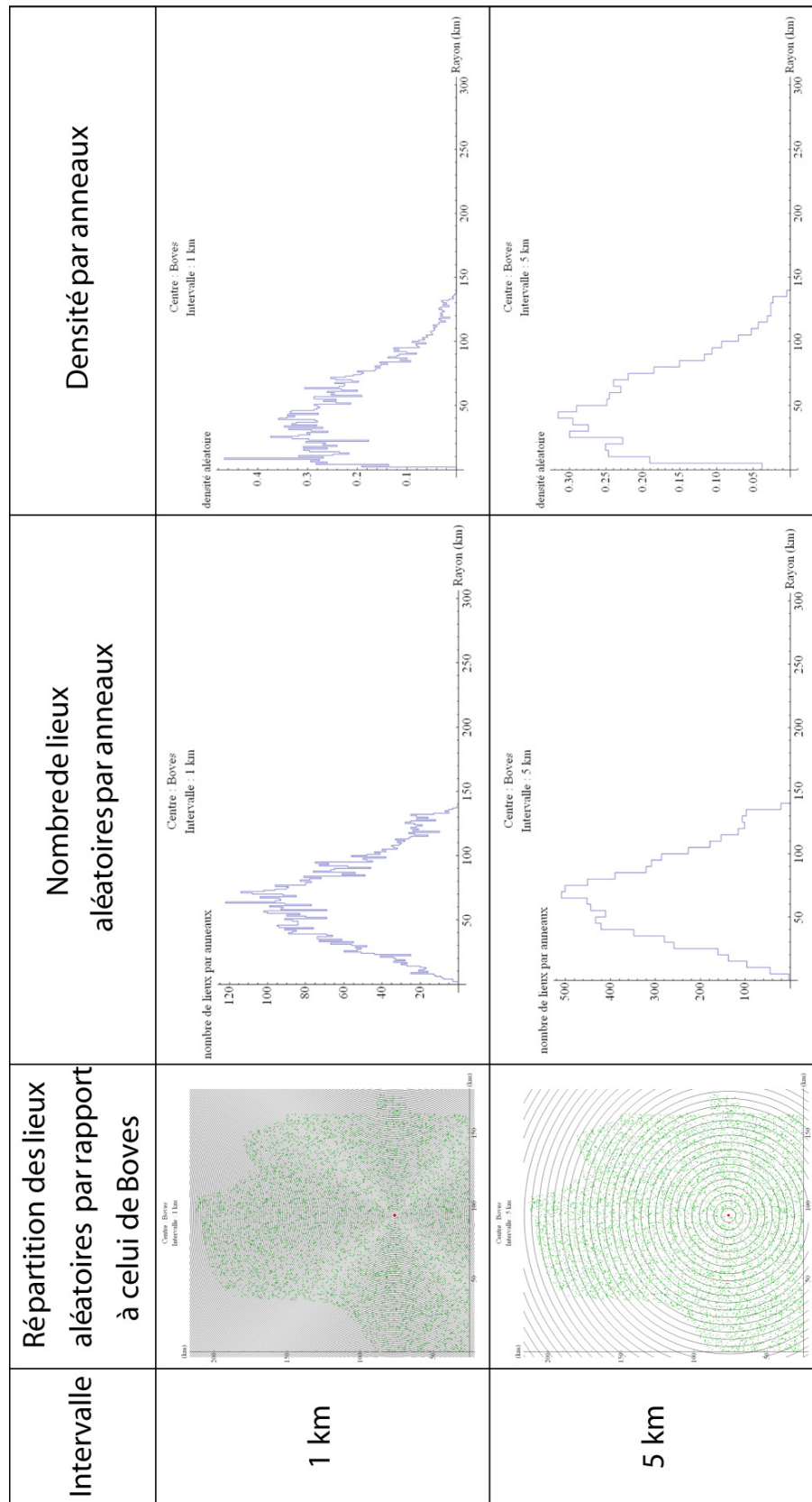


Figure 107-1. Tableau de synthèse de la répartition des lieux aléatoires autour de Boves

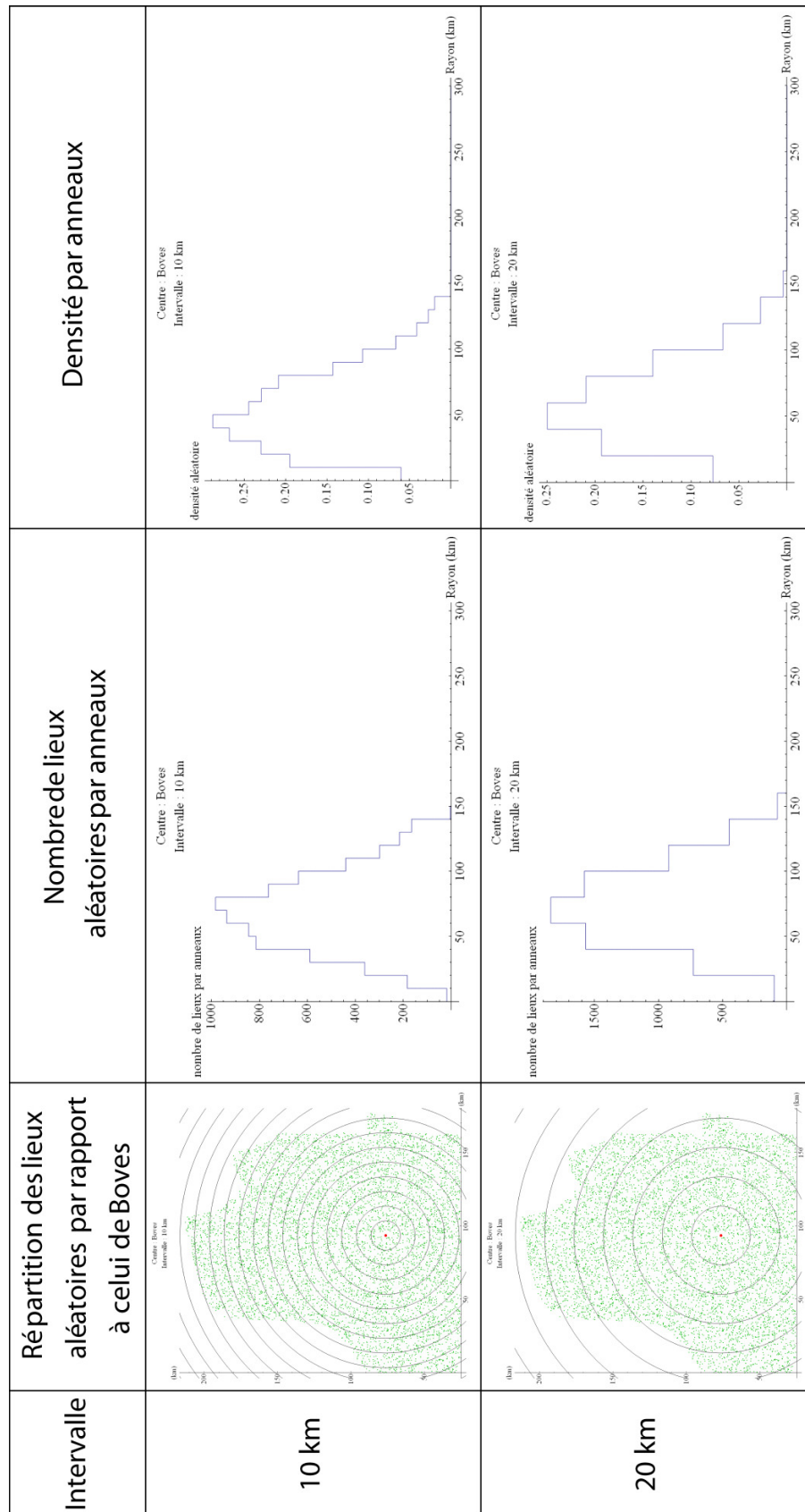


Figure 107-2. Tableau de synthèse de la répartition des lieux aléatoires autour de Boves

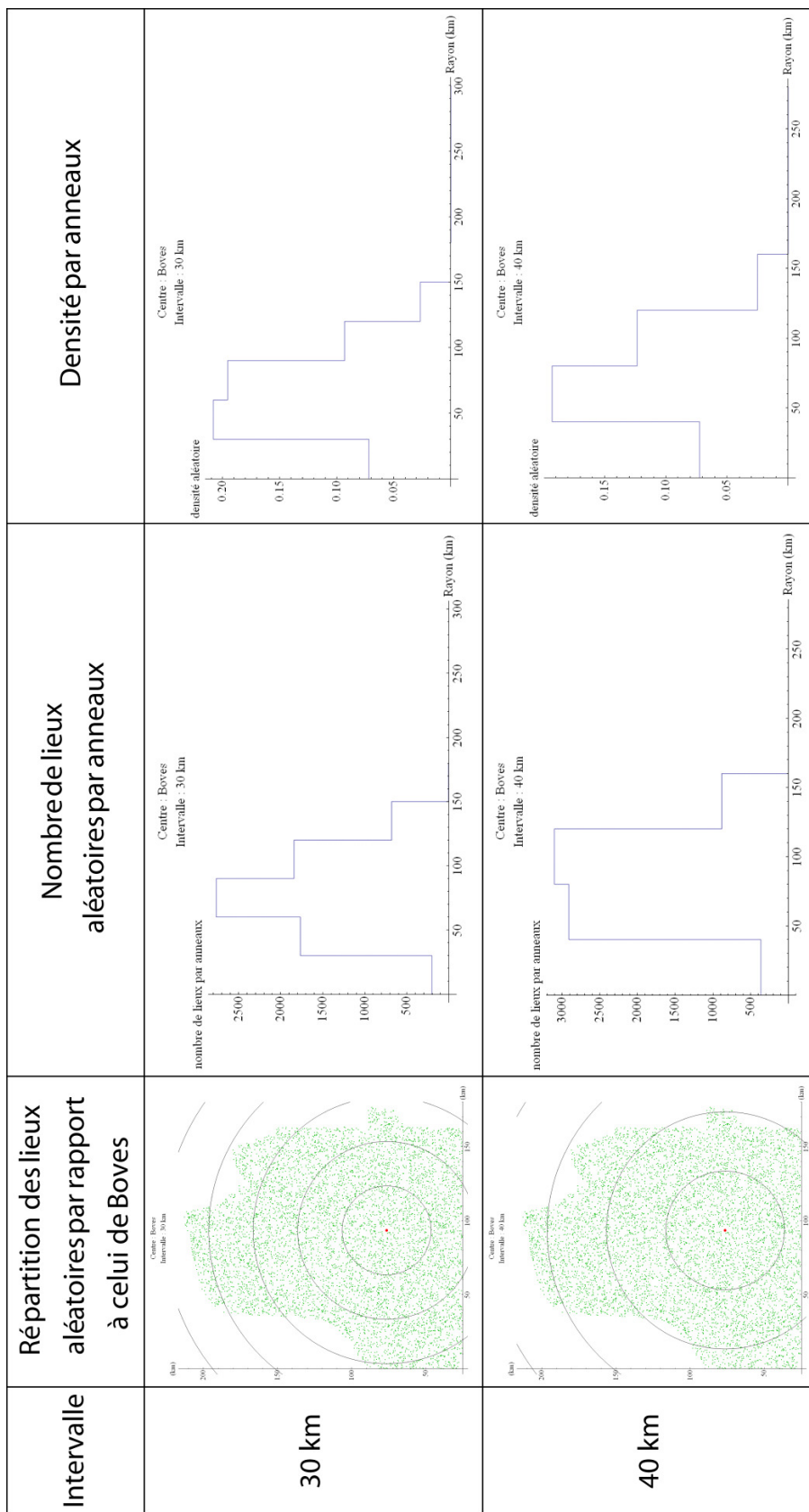


Figure 107-3. Tableau de synthèse de la répartition des lieux aléatoires autour de Boves

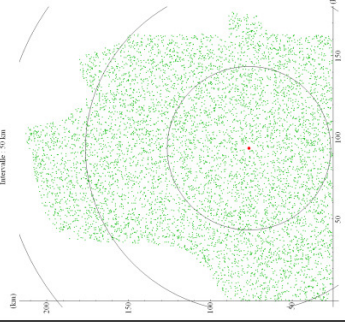
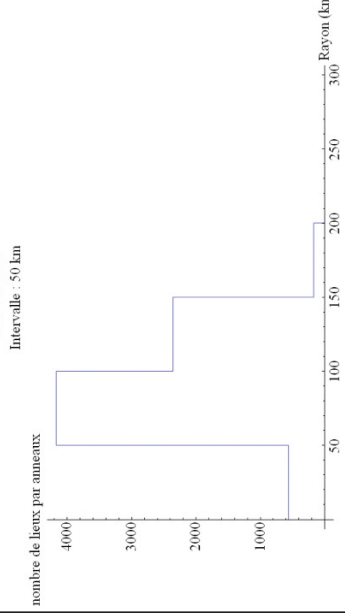
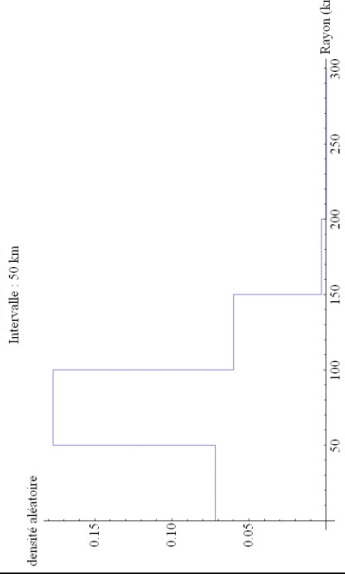
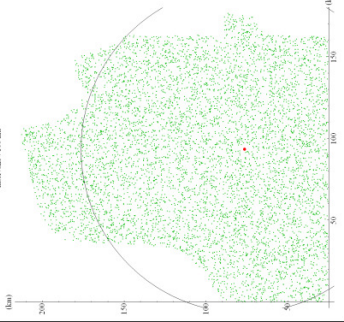
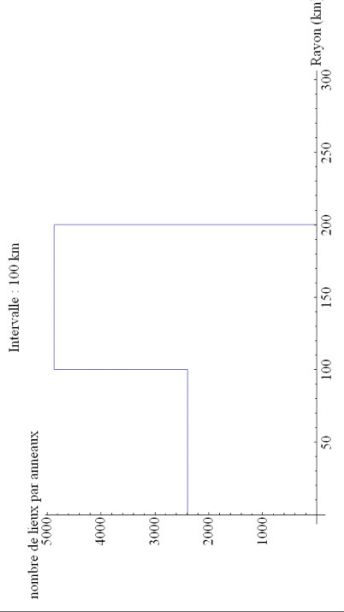
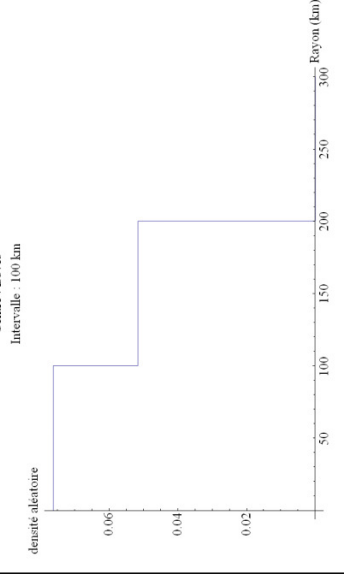
Intervalle	Répartition des lieux aléatoires par rapport à celui de Boves	Nombre de lieux aléatoires par anneaux	Densité par anneaux
50 km			
100 km			

Figure 107-4. Tableau de synthèse de la répartition des lieux aléatoires autour de Boves

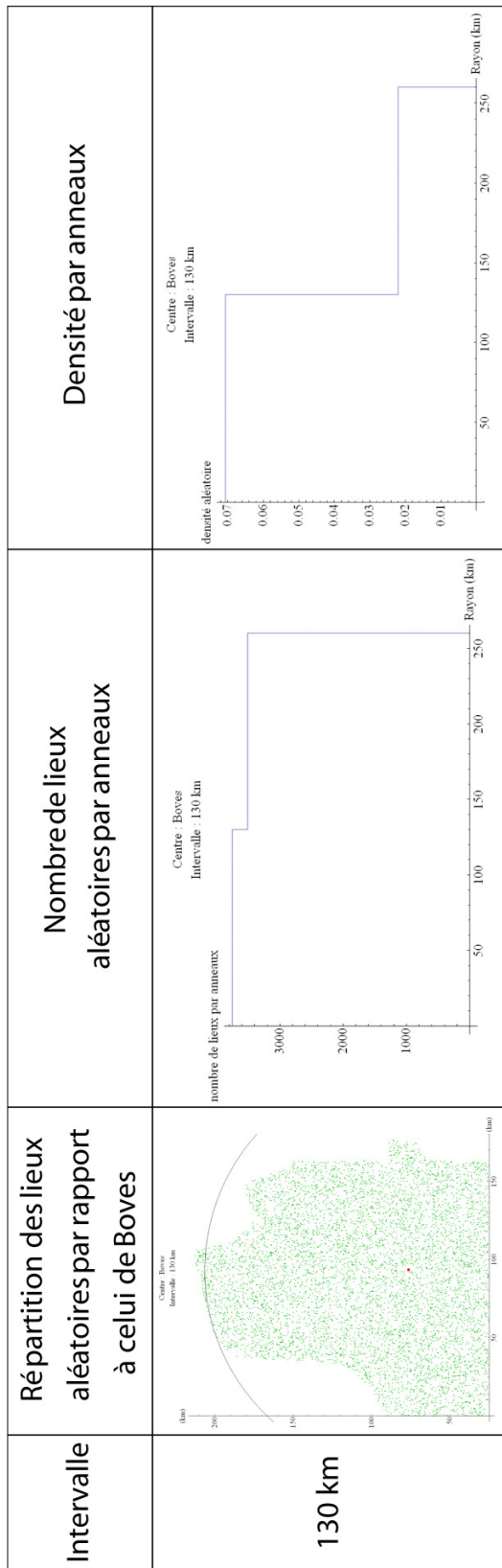


Figure 107-5. Tableau de synthèse de la répartition des lieux aléatoires autour de Boves

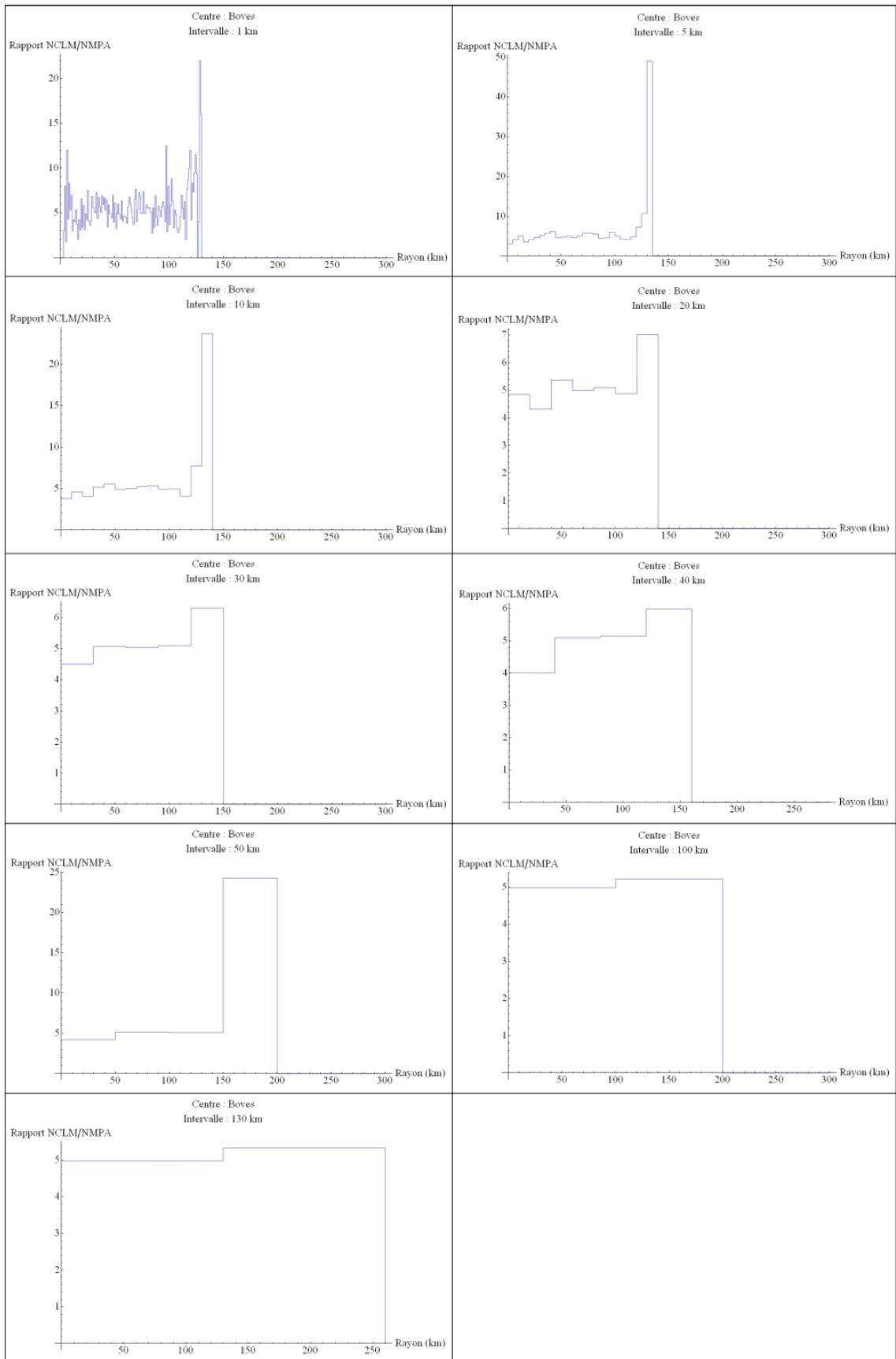


Figure 108. Variation du rapport entre le nombre de lieux aléatoires et le nombre de châteaux dans chaque anneau

12.2.3. Analyse radiale moyenne de la répartition de tous les châteaux

La question qui va être abordée dans ce paragraphe est la suivante. Le cas du château de Boves est-il valable en tout point représentant un château ? La réponse à cette interrogation est affirmative. D'après la Figure 109, la distribution entre le rayon maximal de l'anneau et le nombre moyen de châteaux (ou de lieux aléatoires) ressemble une fois à une gaussienne centrée autour de 75 km. De plus, le rapport entre le nombre moyen de lieux aléatoires et le nombre moyen de châteaux est constant en moyenne en tout point ainsi que dans chaque intervalle. Autrement dit, la densité est constante autour de chaque château. Ces résultats seront confirmés dans le chapitre suivant. L'espace étudié est donc, en moyenne, isotrope.

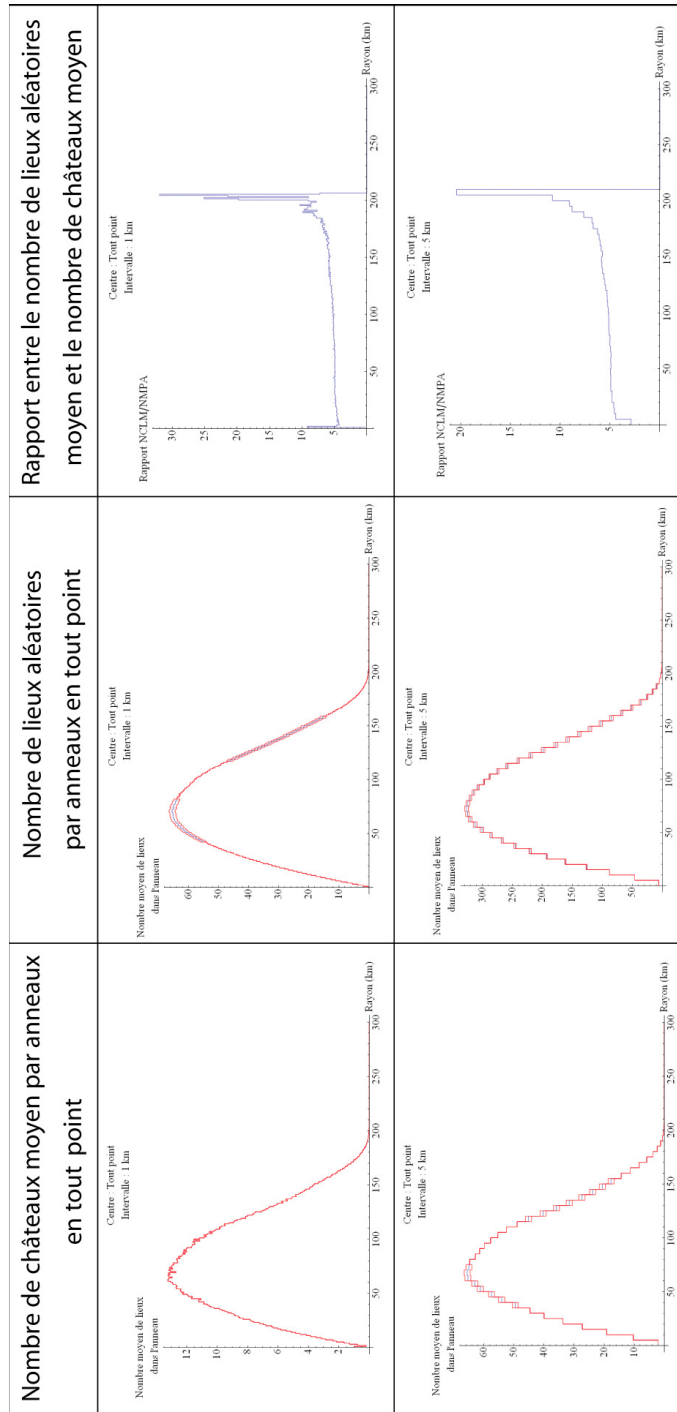


Figure 109-1. Tableau de synthèse des résultats de l'analyse radiale en tout lieu

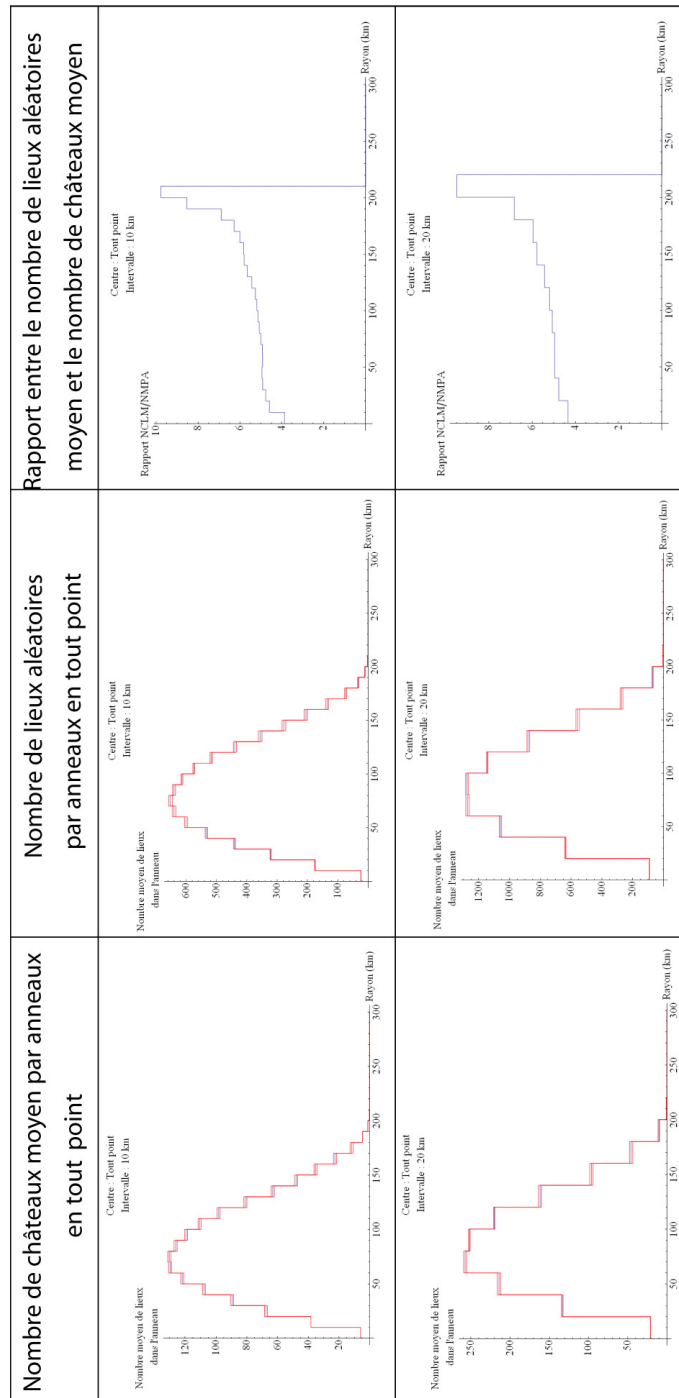


Figure 109-2. Tableau de synthèse des résultats de l'analyse radiale en tout lieu

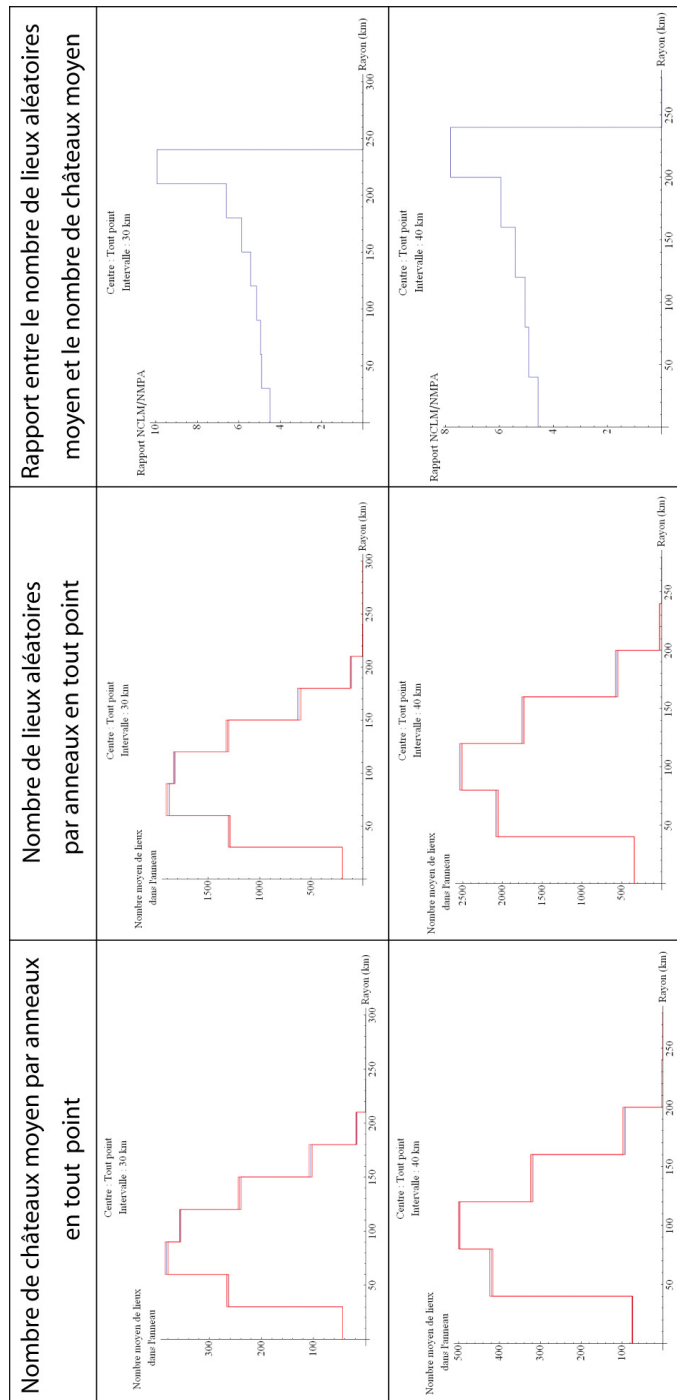


Figure 109-3. Tableau de synthèse des résultats de l'analyse radiale en tout lieu

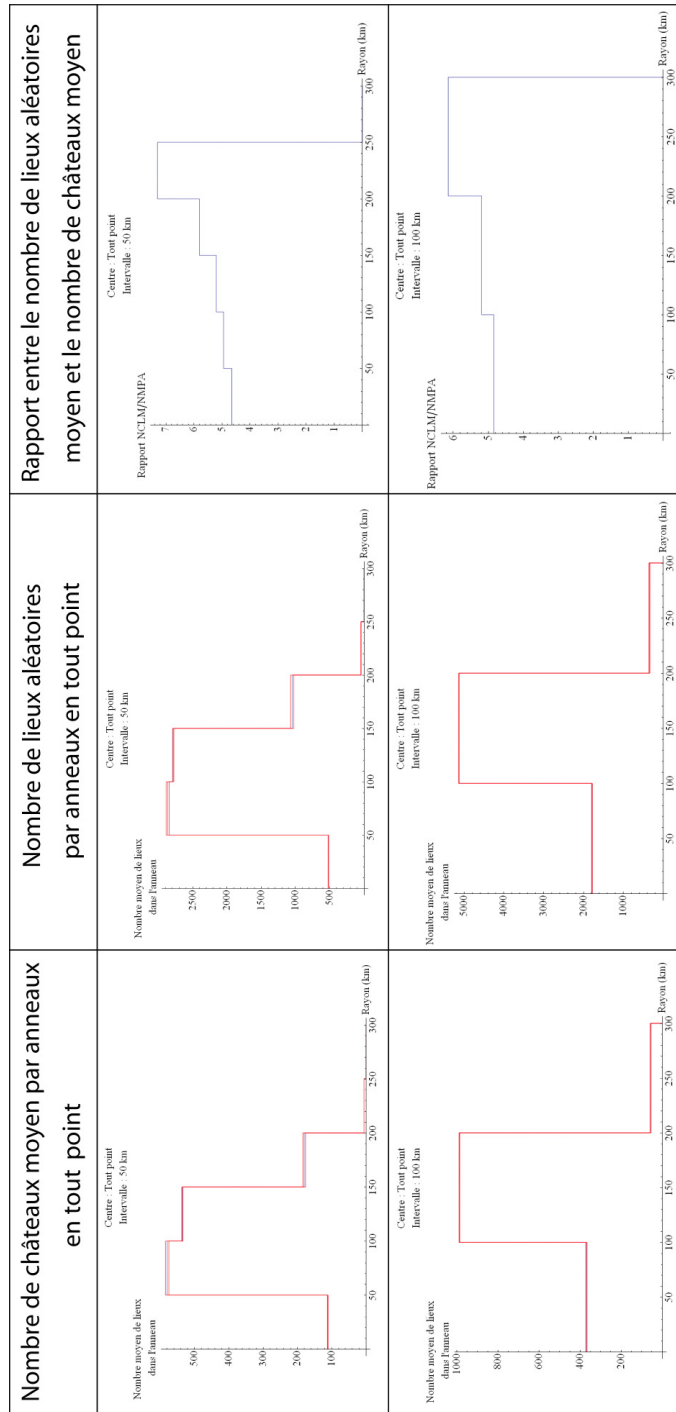


Figure 109-4. Tableau de synthèse des résultats de l'analyse radiale en tout lieu

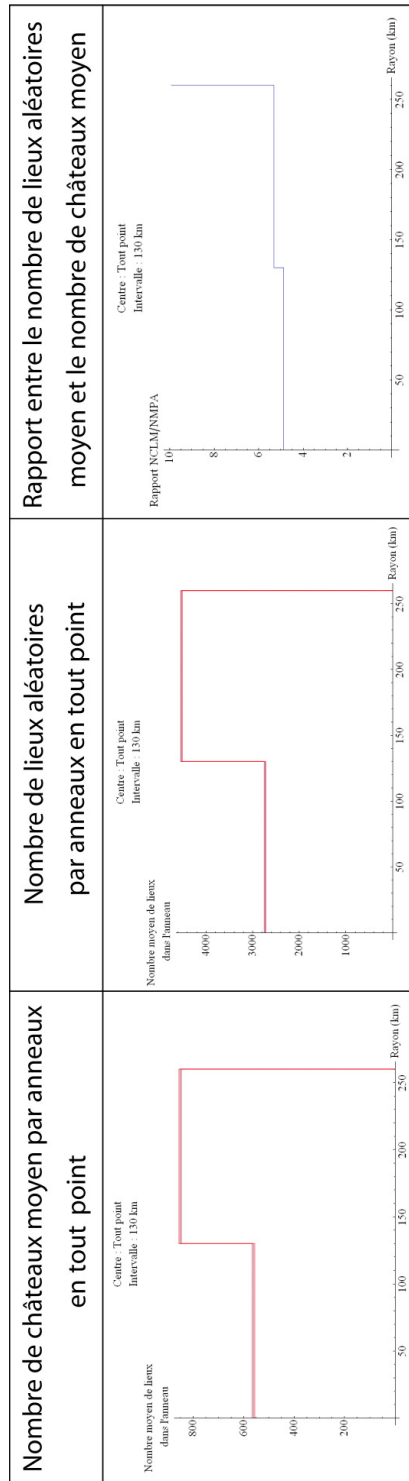


Figure 109-5. Tableau de synthèse des résultats de l'analyse radiale en tout lieu

L'analyse temporelle n'est pas généralisable, car les données temporelles de la base *Catiau* sont trop hétéroclites. Aussi, le cas du château de Boves est remarquable, mais il est unique. Ainsi, l'exploitation des données spatiales semble plus pertinente. En effet, l'analyse radiale en tout point et à des intervalles différents montre que la densité moyenne est constante. Elle demeure cependant insuffisante pour conclure sur la nature fractale de la répartition des châteaux. Ainsi, une analyse fractale que l'on appellera « généralisée » doit être menée pour répondre à cette interrogation.

